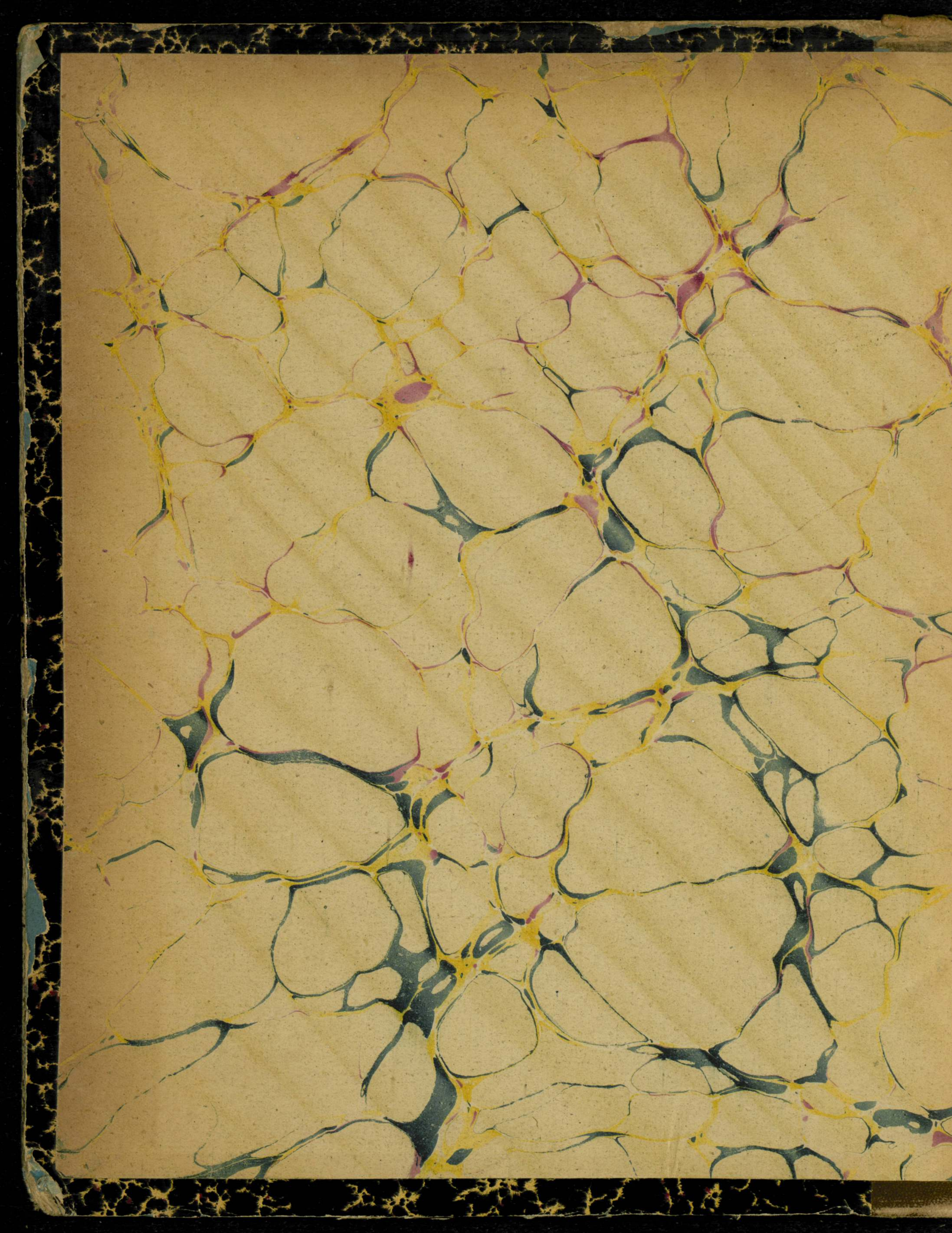


L. LIMASSET

THÉORIE RATIONNELLE DU MOUVEMENT MÉLODIQUE DES SONS







THÉORIE RATIONNELLE

DU

MOUVEMENT MÉLODIQUE DES SONS

L. LIMASSET

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées

THÉORIE RATIONNELLE

DU

MOUVEMENT MÉLODIQUE

DES SONS



REIMS

IMPRIMERIE MATOT-BRAINE

1909

INTRODUCTION

La musique comprend divers éléments, parmi lesquels on distingue notamment le rythme et la mélodie. Nous n'avons en vue ici que les mouvements mélodiques, dont nous ferons l'étude synthétique, comme pour faire comprendre la raison des choses qui concernent la musique en général, et pour donner un léger aperçu des moyens que la science peut mettre à la disposition de l'art.

Le mémoire que nous présentons se réfère uniquement aux impressions perçues à l'intérieur même de l'oreille, à l'exclusion des faits extérieurs et notamment des harmoniques. Nous n'utilisons que des sons simples, sans harmoniques, pour bien montrer que la musique peut se passer de leur secours.

Nous montrons comment les sons sont repérés ; nous expliquons comment ils s'attirent et nous donnons le calcul de ces attractions. On constatera qu'il se forme naturellement des groupes de trois sons permettant de caractériser la périodicité d'octave, les cadences de quarte ou de quinte et enfin l'état harmonique complet défini par les accords parfaits.

De ces faits découle la notion de direction dans les mouvements mélodiques, direction qui nécessite une coordination sans laquelle on tombe dans l'incohérence.

L'impossibilité d'admettre plusieurs périodes engendrera l'incompatibilité d'où naîtra l'anharmonie.

Les changements qui se produisent naturellement dans les divers états harmoniques successifs feront découvrir la notion de tonalité.

Les combinaisons que l'on rencontre amènent des confusions nécessaires entre certains intervalles rapprochés. Nos sens ont dû s'adapter à ces combinaisons, aux dépens de la perfection et de l'étendue de nos perceptions. C'est l'origine de la consonnance et de la dissonnance.

Notre travail ne constitue nullement un traité d'harmonie ou de contrepoint, mais on doit le considérer comme une simple introduction à l'égard de la science musicale. Sans exiger autre chose que des connaissances mathématiques purement élémentaires, il se présente néanmoins sous une forme assez ingrate qui tient à la nature même du sujet, et demande, pour être compris, une attention soutenue. Les résultats obtenus confirment pleinement ce que l'expérience de plusieurs siècles a consacré.

CHAPITRE PREMIER

La Perception des sons, les Intervalles

§ 1. — **Cordes libres.**

Une corde libre donne lieu à plusieurs mouvements vibratoires. La vibration fondamentale est celle qui s'opère sur toute la longueur. Les vibrations harmoniques s'opèrent sur des parties aliquotes de cette longueur, comme s'il y avait plusieurs cordes juxtaposées bout à bout. Les points fixes, entre chaque partie vibrante, sont les nœuds. Le nombre des vibrations est en raison inverse de la distance entre deux nœuds consécutifs.

La vibration fondamentale et les vibrations harmoniques peuvent coexister et se superposer sans se gêner. L'ensemble de ces mouvements vibratoires, ainsi superposés, forme le mouvement vibratoire naturel d'une corde libre.

Toutes les fois qu'on veut imposer à une corde un mouvement vibratoire autre que le fondamental ou les harmoniques, on crée un antagonisme entre le mouvement naturel et le mouvement imposé.

Le mouvement vibratoire naturel d'une corde est caractérisé, quand on connaît le nombre des vibrations fondamentales de cette corde. Tous les mouvements harmoniques s'en déduisent. Le nombre des vibrations de ces mouvements harmoniques est proportionnel au sectionnement de la corde. Il varie conformément à la série des nombres entiers : 1, 2, 3, 4, 5, etc. ; le nombre 1 correspond à la vibration fondamentale.

§ 2. — **Cordes de l'oreille.**

Il y a, dans l'oreille interne, environ 6.000 cordes vibrantes, juxtaposées parallèlement. Le nombre des vibrations fondamentales naturelles de chacune croît régulièrement, en passant d'une corde à la suivante, d'un bout à l'autre de la série.

Ces cordes ne sont pas libres, elles sont assujetties à une sorte de table d'harmonie qui est soumise, par l'intermédiaire de transmissions successives, à partir du tympan, à l'influence des mouvements vibratoires de l'air extérieur. Elles subissent, la plupart malgré elles, le mouvement qui leur est imposé par la table d'harmonie à laquelle elles sont liées. Si elles étaient libres, elles prendraient leur mouvement propre et naturel, comme au § 1. Il y a donc le plus souvent antagonisme entre le mouvement imposé et le mouvement propre. L'agitation des cordes varie en sens inverse de cet antagonisme.

Les cordes de l'oreille sont plongées dans un liquide résistant. Leur mouvement vibratoire cesse en même temps que la vibration extérieure. Elles correspondent à des fibres nerveuses qui permettent à nos sens de percevoir l'antagonisme signalé.

C'est dans ces faits que se trouve l'origine de la perception des sons musicaux. Le problème, soumis au calcul, donne les résultats que nous allons signaler.

§ 3. — **Empreintes.**

Lorsque les cordes de l'oreille subissent l'influence d'une vibration extérieure, il en est quelques-unes qui peuvent recevoir librement ce mouvement, s'il correspond à leur mouvement propre et naturel, soit fondamental, soit harmonique. Ces cordes ne résistent pas au mouvement moteur de la table d'harmonie, elles le prennent dans toute son ampleur. Il n'y a aucun antagonisme entre les deux mouvements et par suite aucun trouble dans le mouvement naturel.

Ces cordes forment ce qu'on nomme les empreintes du son. Elles comprennent celles qui peuvent recevoir le mouvement vibratoire imposé, soit conformément à la vibration fondamentale, soit conformément à une vibration harmonique quelconque. Les empreintes du son portent donc sur les

cordes de l'oreille dont les vibrations fondamentales forment avec la vibration extérieure, les rapports :

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \text{etc.}$$

Ces empreintes portent un numéro d'ordre, suivant le nombre des parties aliquotes en lesquelles la corde se subdivise pour vibrer.

§ 4. — **Zone d'équilibre. — Zone de trouble.**

Les empreintes forment des points précis parmi les cordes de l'oreille. Dans le voisinage immédiat de chacune d'elles, l'antagonisme et le trouble sont faibles. Ce voisinage forme la zone d'équilibre.

Soit n le nombre des vibrations fondamentales de la corde d'une empreinte quelconque ; soit n' le nombre des vibrations fondamentales d'une corde voisine. Le calcul fait voir que, dans la zone d'équilibre, le trouble est proportionnel à l'expression

$$T = \frac{n - n'}{n} \tag{1}$$

En dehors de la zone d'équilibre, nos sens révèlent un antagonisme qui fatigue les fibres nerveuses. C'est la zone de trouble.

§ 5. — **Points neutres.**

Considérons deux empreintes consécutives, et suivons les cordes de l'oreille, en partant d'une de ces empreintes, pour aboutir à la suivante ; examinons le degré de trouble que présente chacune de ces cordes.

Au point de départ, sur l'empreinte, ce trouble est nul ; aux abords de l'empreinte, dans la zone d'équilibre, il est faible ; il va ensuite en croissant jusqu'à un point où il est maximum ; il décroît ensuite jusqu'au moment où l'on arrive à l'empreinte suivante, sur laquelle il s'annule de nouveau.

La corde qui correspond au trouble maximum, entre deux empreintes consécutives, se nomme point neutre ; c'est qu'en effet l'antagonisme y est tel que l'agitation de la corde est pour ainsi dire nulle.

Soient n_p et n_{p+1} le nombre des vibrations fondamentales de deux empreintes consécutives, dont les numéros d'ordre sont p et $p+1$, et soit n_x le nombre des vibrations fondamentales de la corde qui constitue le point neutre intermédiaire ; le calcul montre qu'on a la relation :

$$\frac{1}{n_x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_p} + \frac{1}{n_{p+1}}\right) \quad (2)$$

Cette formule signifie que la durée de la vibration fondamentale de la corde au point neutre est la moyenne arithmétique des durées de celles des cordes des empreintes voisines.

§ 6. — **Mouvement mélodique. — Pivot. — Fenêtres. — Attraction.**

Lorsqu'on fait varier le nombre des vibrations d'un son extérieur, les empreintes correspondantes se déplacent ainsi que les points neutres. Ce déplacement caractérise le mouvement mélodique ; il se mesure à partir d'un son antérieur appelé pivot, dont nos sens gardent le souvenir. Lorsqu'on a exprimé un son qui doit servir de pivot, son impression subsiste, alors même que la vibration extérieure a cessé. Partout où il y avait trouble, la sensibilité reste émoussée. Dans la zone d'équilibre au contraire elle conserve toute sa faculté.

Admettons qu'on perçoive alors un autre son, dont les impressions viennent se superposer à celles du pivot, nos sens ne peuvent facilement discerner les nouvelles impressions que dans la partie de notre organe qui a gardé sa sensibilité, c'est-à-dire dans les zones d'équilibre du pivot. C'est pour cela que les empreintes du pivot sont nommées fenêtres.

Soient a et b (3) deux empreintes consécutives d'un son et N le point neutre intermédiaire. Toute fenêtre du pivot tombe nécessairement entre un point neutre du son et une empreinte voisine. Supposons qu'une fenêtre f tombe entre le point neutre N et l'empreinte b.

(3)

```
  a        N        b
  |        ·  <-----|
              |
              f
```

Déplaçons le son de manière que l'empreinte b s'approche de la fenêtre f, le trouble perçu par nos sens, à travers la fenêtre f va en diminuant, jusqu'à

ce que *b* tombe sur *f*. Le mouvement, tel que nos sens le perçoivent, à travers la fenêtre *f*, nous fait donc ainsi éprouver une certaine satisfaction. C'est en cela que consiste l'attraction exercée par la fenêtre *f* sur l'empreinte *b*.

Chaque fenêtre du pivot provoque une attraction, à moins qu'elle coïncide avec une empreinte du son.

§ 7. — **Equilibre relatif. — Intervalle et stabilité. — Instabilité attraction indécise et dédoublement du son.**

Quand une empreinte du son tombe sur une fenêtre du pivot, aucun trouble n'apparaît à travers cette fenêtre ; dès qu'on déplace le son légèrement, soit à droite, soit à gauche, le trouble apparaît immédiatement. Il se développe ainsi, d'un côté comme de l'autre, une attraction qui tend à ramener le son à sa position primitive. On peut donc dire que, quand une empreinte porte sur une fenêtre, la position du son est en équilibre stable relativement à la fenêtre considérée.

Un son qui se trouve en équilibre stable relativement à une fenêtre du pivot forme avec celui-ci ce qu'on nomme un intervalle.

Lorsqu'une fenêtre du pivot coïncide avec un point neutre du son, cette fenêtre ne sollicite pas plus une des deux empreintes voisines que l'autre. Si on déplace le son, si peu que ce soit, d'un côté ou de l'autre, l'équilibre est rompu, et le son tend à s'écarter de sa position initiale. Cette position initiale correspond donc à un état d'équilibre instable.

Lorsqu'on envisage cette position instable qui correspond à la coïncidence d'un point neutre du son et d'une fenêtre du pivot, on constate qu'il n'y a pas à proprement parler attraction ; mais, comme le moindre déplacement peut exciter le son à se mouvoir, soit d'un côté, soit de l'autre, on dit que l'attraction est indécise. On conçoit dès lors qu'un son, placé dans cette position d'attraction indécise, puisse se dédoubler en deux autres qui se dirigent en sens inverse, conformément à chacune des attractions qui résultent de l'indécision.

§ 8. — **Notation des intervalles. — Rapport des vibrations.**

Les empreintes d'un son se composent des cordes de l'oreille qui vibrent conformément à la vibration extérieure. Elles sont numérotées suivant

le sectionnement qu'elles prennent pour vibrer. Le nombre des vibrations fondamentales de chacune de ces cordes est représenté par chaque terme de la série suivante (4), en allant de droite à gauche, série dans laquelle N représente le nombre des vibrations extérieures.

(4)									
	Nombre des vibrations fondamentales des empreintes :	. . $\frac{N}{K}$	. . .	$\frac{N}{6}$	$\frac{N}{5}$	$\frac{N}{4}$	$\frac{N}{3}$	$\frac{N}{2}$	$\frac{N}{1}$
	Numéro d'ordre des empreintes	. . K^e	. . .	6^e	5^e	4^e	3^e	2^e	1^e

Les fenêtres du pivot sont numérotées de la même manière que les empreintes du son.

Quand le son et le pivot correspondent au même nombre de vibrations, toutes les empreintes du son se superposent aux fenêtres du même ordre du pivot. Le son et le pivot donnent une perception absolument concordante. L'intervalle est nul, c'est l'unisson.

Si l'intervalle, au lieu d'être nul, est tel que l'empreinte 5 par exemple porte sur la fenêtre 3, on constate que cette empreinte 5, qui dans l'unisson posait sur la fenêtre 5, a été déplacée jusqu'à la fenêtre 3. Ce déplacement, compté sur le pivot, forme un intervalle qui s'étend de la fenêtre 5 à la fenêtre 3. On convient de noter cet intervalle par la fraction entre parenthèses :

(5) $$\left(\frac{5}{3}\right)$$

dans laquelle les deux termes, numérateur et dénominateur, sont les numéros d'ordre de l'empreinte et de la fenêtre confondues.

On suppose, conformément à la série (4), que les empreintes vont dans l'ordre croissant de droite à gauche. Cela revient à admettre que les vibrations fondamentales des cordes de l'oreille vont en croissant de gauche à droite.

Il suit de là que, quand la fraction représentant un intervalle est plus grande que l'unité, comme $\left(\frac{5}{3}\right)$ par exemple, le déplacement se fait à droite ; le son monte. Si la fraction est moindre que l'unité, le déplacement se fait à gauche, le son descend.

Les mouvements montants sont considérés comme positifs, les descendants comme négatifs. L'unisson, c'est-à-dire l'intervalle nul, est figuré par une fraction égale à l'unité.

Nous allons faire voir que la fraction entre parenthèses qui représente un intervalle est égale au rapport du nombre des vibrations du son et du pivot.

Soit l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$; considérons la corde commune de l'oreille, qui

forme à la fois l'empreinte d'ordre 5 et la fenêtre d'ordre 3. Cette corde commune, pour vibrer comme le son extérieur, se sectionne en 5 tronçons ; pour vibrer comme le pivot, elle se sectionne en 3 tronçons. Le son a donc 5 fois plus de vibrations que le mouvement vibratoire fondamental de la corde commune ; le pivot en a 3 fois plus. Le rapport des vibrations du son et du pivot est donc bien $\left(\frac{5}{3}\right)$, comme nous l'avons annoncé.

§ 9. — Sons implicites. — Sons harmoniques ou virtuels. — Equilibre absolu. — Intervalles originaux.

Soit un son de N vibrations ; le nombre des vibrations fondamentales des cordes qui forment les empreintes correspond aux termes de la série (4). Considérons un autre son de $\frac{N}{p}$ vibrations, p étant entier, pour obtenir les vibrations fondamentales des empreintes correspondantes, il suffit de changer dans la série (4), N en $\frac{N}{p}$; on obtient ainsi :

$$(6) \qquad \ldots \frac{N}{Kp} \ldots \frac{N}{5p} \quad \frac{N}{4p} \quad \frac{N}{3p} \quad \frac{N}{2p} \quad \frac{N}{p}$$

On reconnaît que tous les termes de la série (6) sont contenus dans la série (4). On conclut qu'un son de $\frac{N}{p}$ vibrations a toutes ses empreintes contenues parmi celles du son de N vibrations ; le premier son est donc contenu implicitement dans le second. On dit alors que le premier est un son implicite du second. Les divers sons implicites d'un son donné portent des numéros d'ordre, conformément au nombre p qui les caractérise. L'intervalle entre un son donné et le son implicite d'ordre p est $\left(\frac{1}{p}\right)$.

Soit à considérer un son de pN vibrations, p étant entier. Les empreintes de ce son porteront sur des cordes de l'oreille dont les vibrations fondamentales correspondent à la série (4), dans laquelle on remplacerait N par pN, savoir :

$$(7) \qquad \ldots \frac{pN}{K} \ldots \frac{pN}{5} \quad \frac{pN}{4} \quad \frac{pN}{3} \quad \frac{pN}{2} \quad \frac{pN}{1}$$

On constate que le son de N vibrations (série 4) ne contient qu'une partie des empreintes de celui de pN vibrations (série 7) ; ce sont celles dont le numéro d'ordre, au dénominateur, est multiple de p ; le facteur p disparaît alors aux deux termes et on tombe sur une expression appartenant à la série (4).

Le son de N vibrations est un son implicite de celui de pN vibrations ; on

dit que celui-ci est un son harmonique ou virtuel du premier. Il y a réciprocité entre la désignation de son implicite et celle de son harmonique. Tout son implicite d'un autre a pour son harmonique cet autre, et réciproquement.

Tout son harmonique d'un autre est en équilibre absolu sur cet autre pris comme pivot. Toutes les fenêtres du pivot, portant sur des empreintes du son, ne peuvent provoquer aucune attraction.

On appelle intervalle original celui qui est formé par un son donné avec un de ses harmoniques, ou un de ses implicites. Les intervalles originaux sont figurés par des nombres entiers ou leurs inverses.

$$\left(\frac{p}{1}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{p}\right)$$

§ 10. — **Position des points neutres. — Octave.**

Considérons un son de N vibrations, dont les empreintes portent sur les cordes de la série (4), et envisageons un autre son, harmonique du premier, et formant avec lui l'intervalle original $\left(\frac{2}{1}\right)$. Les empreintes de ce deuxième son portent sur les cordes de l'oreille définies par la série (8) obtenue en changeant N en $2N$ dans la série (4)

$$(8) \qquad \cdots \quad \frac{2N}{K} \quad \cdots \quad \frac{2N}{6} \quad \frac{2N}{5} \quad \frac{2N}{4} \quad \frac{2N}{3} \quad \frac{2N}{2} \quad \frac{2N}{1}$$

On voit que toutes les empreintes paires de la série (8) portent sur les mêmes cordes de l'oreille que celles de la série (4). Nous allons démontrer que les empreintes impaires de la série (8) portent sur les points neutres du son de N vibrations.

Considérons les empreintes consécutives p et $p+1$ du son de N vibrations. Les nombres de vibrations fondamentales des cordes de ces empreintes sont donnés par la série (4), savoir :

$$\frac{N}{p} \quad \text{et} \quad \frac{N}{p+1}$$

Reportons-nous à l'équation (2) § 5 qui définit le nombre des vibrations

fondamentales de la corde qui porte le point neutre. Remplaçons-y N_p par $\frac{N}{p}$ et N_{p+1} par $\frac{N}{p+1}$, il vient :

$$\frac{1}{n_x} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{N} + \frac{p+1}{N} \right) \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$(9) \qquad n_x = \frac{2\,N}{2p+1}$$

On voit que la corde correspondante figure parmi celles de la série (8) avec l'ordre impair $2p+1$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

Lorsqu'on a besoin de repérer les diverses empreintes d'un même son on constate et on dit que l'empreinte d'ordre p est séparée de la première empreinte par l'intervalle $\left(\frac{p}{1}\right)$. L'équation 9 montre que le point neutre compris entre les empreintes consécutives p et $p+1$ est séparé de la première empreinte par l'intervalle $\left(\frac{2p \times 1}{2}\right)$. Dans cette expression, le nombre entre parenthèses est la moyenne arithmétique des numéros d'ordre des deux empreintes consécutives.

Remarque. — Ce qui précède ne veut pas dire que l'intervalle $\left(\frac{2p+1}{2}\right)$ est la moyenne arithmétique des intervalles $\left(\frac{p}{1}\right)$ et $\left(\frac{p+1}{1}\right)$. On verra en effet que, pour ajouter deux intervalles, il faut multiplier les fractions qui les représentent ; c'est-à-dire que l'on a :

$$\left(\frac{p}{1}\right) + \left(\frac{p+1}{1}\right) = \left(\frac{p\,(p+1)}{1}\right)$$

Pour diviser cet intervalle par 2, il faut extraire la racine carrée de la quantité entre parenthèses, savoir :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p\,(p+1)}{1}\right) = \left(\frac{\sqrt{p\;(p+1)}}{1}\right)$$

Telle est la moyenne des deux intervalles.

L'intervalle original $\left(\frac{2}{1}\right)$, dont les empreintes impaires servent à déterminer la position des points neutres du son donné, a une importance capitale en musique ; il doit précisément cette importance à cette propriété. On le nomme octave.

§ 11. — **Support réel. — Intervalles égaux.**

Considérons un son formant avec son pivot un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ et supposons p et q premiers entre eux. Cette notation signifie que l'empreinte p du son porte sur la fenêtre q du pivot. Envisageons dès lors, soit le son implicite d'ordre p du son donné, soit le son implicite d'ordre q du pivot, nous constatons que la première empreinte de l'un est la même que la première empreinte de l'autre. Ces deux sons sont donc entièrement confondus, ils ont donc toutes leurs empreintes communes. Le son et le pivot ont ainsi un son implicite commun : On lui donne le nom de support réel.

Il résulte de ce qui précède que deux sons formant entre eux un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ ont une infinité d'empreintes communes, qui sont précisément les empreintes du support réel. Le numéro d'ordre de ces empreintes communes, sur chacun des deux sons qui composent l'intervalle, sont respectivement des équimultiples de p et q.

Lorsqu'on exprime les deux sons qui forment un intervalle, les empreintes du support réel sont les seules qui demeurent entièrement lucides. Toute autre empreinte de l'un des sons est nécessairement obscurcie par le trouble venant de l'autre son.

Nous allons nous servir des indications qui précèdent pour faire voir que deux intervalles sont égaux, quand les fractions entre parenthèses qui les représentent sont égales.

Considérons en effet l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, dans lequel p et q sont premiers entre eux. Les empreintes communes aux deux sons sont celles du support réel ; elles sont respectivement équimultiples de p et q, c'est-à-dire que l'empreinte Kp, par exemple, porte sur la fenêtre Kq. Si on se reporte à la définition de l'intervalle, § 8, on voit que le même intervalle peut s'écrire $\left(\frac{Kp}{Kq}\right)$ aussi bien que $\left(\frac{p}{q}\right)$; on a donc l'égalité :

$$\left(\frac{Kp}{Kq}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. On conçoit du reste qu'il ne pouvait en être autrement, un intervalle étant déterminé par le rapport des vibrations des deux sons qui le composent, § 8.

Désignons par N, N' et n le nombre des vibrations du son, du pivot et

d'un troisième son correspondant au support réel. Comme celui-ci est son implicite commun du son donné et du pivot, avec l'ordre p pour le premier et l'ordre q pour le second, on a les relations

$$\text{(10)} \qquad \frac{N}{p} = \frac{N'}{q} = n \quad \text{ou bien} \quad N = pn \qquad N' = qn$$

§ 12. — **Addition et soustraction des intervalles.**

Considérons deux intervalles $\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\left(\frac{p'}{q'}\right)$, nous allons démontrer que leur somme forme un nouvel intervalle représenté par une nouvelle fraction obtenue en faisant le produit des deux premières, savoir :

$$\text{(11)} \qquad \left(\frac{p}{q}\right) + \left(\frac{p'}{q'}\right) = \left(\frac{pp'}{qq'}\right)$$

La différence s'obtient par le quotient des deux fractions :

$$\text{(12)} \qquad \left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{p'}{q'}\right) = \left(\frac{pq'}{qp'}\right)$$

Pour le démontrer, nous distinguons deux cas :

1° Les intervalles à ajouter ont une extrémité commune sur le pivot. Soient (13) la série des fenêtres successives du pivot.

(13) 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Considérons les intervalles $\left(\frac{7}{5}\right)$ et $\left(\frac{5}{3}\right)$ qu'il s'agit d'ajouter et qui ont une extrémité commune 5. On voit, sur la figure, que l'intervalle total est $\left(\frac{7}{3}\right)$ dont la fraction représente le produit des deux premières.

2° Les intervalles à ajouter sont quelconques.

Soient $\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\left(\frac{p'}{q'}\right)$ les deux intervalles qu'il faut ajouter. Multiplions

les deux termes du premier par p' et les deux termes du second par q, les intervalles ne changent pas de valeur, § 11, il vient :

$$\left(\frac{p\,p'}{q\,p'}\right) \qquad \left(\frac{p'\,q}{q'\,q}\right)$$

Sous cette forme, on voit qu'ils ont une extrémité commune sur l'empreinte qp', on se trouve donc dans le cas précédent. La somme des intervalles est donc :

$$\left(\frac{p\,p'}{q\,q'}\right)$$

ce qui démontre la proposition.

La règle pour la soustraction découle tout naturellement de ce qui précède.

Remarque. — Supposons que l'on envisage un intervalle dans lequel le rapport des vibrations des deux sons est représenté par un nombre r. La règle de l'addition nous fait voir qu'un intervalle double, triple, quadruple, etc., correspond à un rapport de vibrations marqué par r^2, r^3, r^4, etc. Si on appelle I l'intervalle qui correspond à la fraction r, les intervalles correspondant aux fractions r^2, r^3, r^4, etc., seront $2I$, $3I$, $4I$, etc. On aura, en établissant la correspondance entre les deux séries.

Rapports des vibrations :	1	r	r^2	r^3	r^4	. . .	r^k	. . .
Intervalles	O	I	$2I$	$3I$	$4I$	. . .	KI	. . .

La première ligne forme une progression géométrique, la seconde une progression arithmétique. On conclut que les intervalles sont les logarithmes des rapports des vibrations des sons qui les composent.

Malgré cette observation, nous conservons la notation adoptée pour les intervalles ; elle s'adapte bien au sujet. Il était cependant intéressant de constater que les combinaisons musicales sont des calculs logarithmiques auxquels les musiciens primitifs se sont livrés, avant la découverte des logarithmes, et par suite, sans s'en douter.

§ 13. — **Support virtuel**.

Nous avons vu que le support réel était formé par un son implicite commun à deux sons donnés. Nous allons faire voir que ces deux sons donnés

ont un son harmonique commun, auquel nous donnons le nom de support virtuel.

Soient deux sons formant un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q étant premiers entre eux. Soit n le nombre des vibrations du son qui correspond au support réel. Les équations (**10**) montrent que le nombre des vibrations des deux sons donnés résulte des égalités.

$$N = pn \qquad N' = qn$$

Un son harmonique commun à ces deux sons doit avoir un nombre de vibrations multiple, à la fois de pn et de qn. Comme p et q sont premiers entre eux, le plus petit multiple commun de pn et de qn est pqn. Tout son harmonique commun aux deux sons donnés possédera un nombre de vibrations multiple de pqn. Le moins élevé de ces multiples, c'est-à-dire pqn, correspond au support virtuel qui possède effectivement pqn vibrations.

Soit donc n_1 le nombre des vibrations qui s'applique au support virtuel, on aura :

(**14**) $$n_1 = pqn = pN' = qN$$

L'intervalle entre le support réel et le support virtuel est marqué par le rapport $\left(\frac{n_1}{n}\right)$; on voit qu'il est égal à :

(**15**) $$\left(\frac{n_1}{n}\right) = \left(\frac{pq}{1}\right)$$

C'est donc un intervalle original.

Nous représentons, sur le schéma (**16**), les positions relatives des diverses empreintes communes aux deux sons donnés et aux supports réels et virtuels

		pq	p	q	1
(**16**)	Support virtuel	..... |	.... |	.... |	.... |
	Son donné	..... |p	....	|	
	Pivot ou autre son donné	..... |q	.... |		
	Support réel	..... |			
		1			

La première empreinte du support réel coïncide avec les empreintes q

du pivot, p du son, pq du support virtuel. L'empreinte n° 1 du pivot coïncide avec l'empreinte p du support virtuel. L'empreinte n° 1 du son correspond à l'empreinte q du support virtuel.

§ 14. — **Sons conjugués. — Intervalles différentiels.**

Considérons deux sons formant entre eux un intervalle original $\left(\frac{M}{1}\right)$. Proposons nous de trouver deux autres sons qui aient les deux sons donnés pour supports réels et virtuels. Soit $\left(\frac{p}{q}\right)$ l'intervalle formé par les deux sons cherchés. L'équation (**15**) indique que l'intervalle entre les supports réels et virtuels correspondant à l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ est $\left(\frac{pq}{1}\right)$. Mais nous savons que cet intervalle, qui est donné, a pour valeur $\left(\frac{M}{1}\right)$. On doit donc avoir

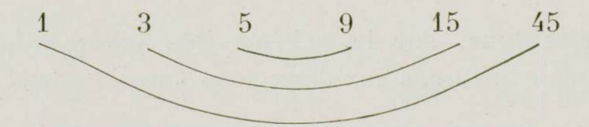
$$pq = M$$

Il y a donc autant de solutions qu'il est possible de décomposer M en deux facteurs.

Les deux sons ainsi obtenus sont appelés sons conjugués relativement aux supports réels et virtuels donnés.

Pour obtenir la série des sons conjugués qui correspondent à un nombre donné M, on procède de la manière suivante :

Prenons par exemple $M = 45$. Cherchons tous les diviseurs de 45 et classons-les par ordre de grandeur.



Chaque facteur correspond à un autre pour former le produit 45. Ces diviseurs conjugués sont ceux qui sont à égale distance des extrêmes. Il y a ici trois systèmes de sons conjugués.

Les supports réels et virtuels font entre eux des intervalles originaux, ils constituent un système de sons conjugués. Les autres systèmes de sons conjugués forment entre eux des intervalles appelés différentiels. Les intervalles originaux ont une existence propre. Les intervalles différentiels sont au contraire formés de la différence de deux intervalles originaux.

L'ensemble des sons conjugués correspondant au nombre 45 forment, ainsi qu'on le verra par la suite, ce qu'on nomme l'échelle diatonique.

Quand M est un nombre premier, on ne peut le décomposer en facteurs que d'une seule manière $1 \times M$. L'intervalle $\left(\frac{M}{1}\right)$ est alors original absolu.

§ 15. — **L'épaisseur de la zone d'équilibre est la même pour toutes les empreintes d'un même son.**

Les explications qui précèdent ayant donné la notion exacte de ce qu'on nomme un intervalle, nous pouvons démontrer la proposition indiquée par le titre de ce paragraphe, c'est-à-dire que l'épaisseur de la zone d'équilibre forme un intervalle constant, quelle que soit l'empreinte à laquelle elle s'applique.

La zone d'équilibre est limitée par définition à la partie des cordes de l'oreille qui forment le voisinage immédiat de chaque empreinte. Elle s'étend jusqu'au point où le trouble développé par l'antagonisme des mouvements prend une certaine valeur. Soit C l'expression de cette valeur limite où cesse la zone d'équilibre et où commence la zone de trouble. L'équation (1), § 4, donne :

$$\frac{n - n'}{n} = C \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad \frac{n'}{n} = 1 - C$$

La limite C étant partout la même, on voit que le rapport $\left(\frac{n'}{n}\right)$ est constant pour toutes les empreintes. Mais ce rapport peut servir à représenter l'intervalle qui sépare l'empreinte de la limite de la zone d'équilibre ; cet intervalle est donc constant et représenté par $\left(\frac{n'}{n}\right)$. L'épaisseur totale de la zone d'équilibre est égale au double de cet intervalle.

CHAPITRE II

Calcul des Attractions

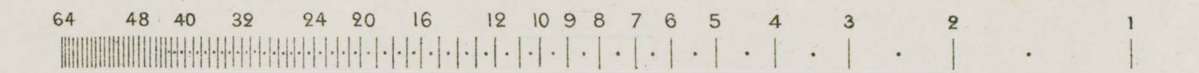
§ 1. – Les attractions sont indépendantes de la loi suivant laquelle sont réparties les cordes de l'oreille.

Nous avons admis que le nombre des vibrations fondamentales des cordes de l'oreille allait en croissant, d'une corde à la suivante, d'un bout à l'autre de la série, de gauche à droite. On a vu d'autre part que les attractions, telles qu'elles ont été définies au chapitre I, § 6, ne dépendent que de la position des empreintes et des points neutres du son, relativement aux fenêtres du pivot. Cette position relative ne dépend pas de la loi de répartition des cordes, pourvu que la continuité soit respectée. Les attractions ne dépendent donc pas de cette loi.

On pourrait admettre, par exemple, une loi de répartition telle que les empreintes comportent, entre elles, des écartements égaux aux intervalles correspondants. Les empreintes successives, conformément à la remarque faite au chapitre I, § 12, seraient placées à des distances de la première marquées par : Log. 2, log. 3, log. 4, etc. Les déplacements mélodiques des sons correspondraient alors à une translation de tout le système d'empreintes. Les points neutres seraient placés à des distances de l'empreinte n° 1 marquées par : Log. $\frac{1}{2}$, log. $\frac{3}{2}$, log. $\frac{5}{2}$, log. $\frac{7}{2}$, etc. Ces empreintes et ces points neutres seraient disposés comme sur la figure (17).

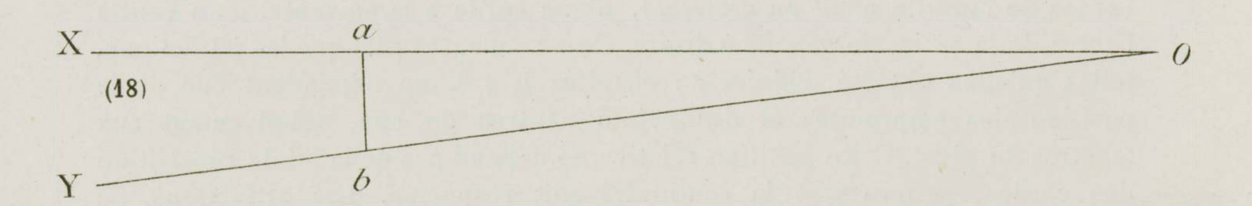
Malgré certains avantages qui pourraient résulter de cette combinaison, nous en adopterons une autre qui se prêtera mieux au calcul des attractions.

(17)



§ 2. — **Tracé des empreintes le plus propre au calcul des attractions.**

Nous admettrons que les cordes de l'oreille sont disposées de manière que leur distance à un point fixe soit proportionnelle à la durée de la vibration fondamentale de chacune d'elles. Comme le nombre des vibrations fondamentales est en raison inverse de leur durée, on peut encore dire que les cordes de l'oreille sont réparties de manière que leur distance à un point fixe soit en raison inverse du nombre des vibrations fondamentales de chacune d'elles. Si les cordes de l'oreille avaient toutes la même grosseur et la même tension, on matérialiserait notre hypothèse en disant que les extrémités de ces cordes posent sur deux droites ox et oy, qui convergent en un point O, conformément à la figure (18). La ligne ab représenterait une de ces cordes.



On sait que le nombre des vibrations fondamentales des cordes qui forment les empreintes d'un même son, est en raison inverse du numéro d'ordre de ces empreintes, il en résulte que les empreintes d'un même son sont équidistantes.

Soit D la distance à l'origine d'une corde de l'oreille comportant N vibrations fondamentales, on aura, d'après ce qui précède, C étant une constante :

$$D = \frac{C}{N}$$

Cette corde forme l'empreinte n° 1 du son de N vibrations. Cherchons quelle est la distance à l'origine de l'empreinte d'ordre K. Cette empreinte portant sur une corde qui a $\frac{N}{K}$ vibrations fondamentales, il vient :

$$D_k = \frac{C K}{N}$$

L'équidistance des empreintes est égale à D, soit à $\frac{C}{N}$, c'est-à-dire qu'elle est en raison inverse du nombre des vibrations, ou bien qu'elle est proportionnelle à sa durée.

Le point neutre, entre deux empreintes consécutives, pose sur une corde dont la durée de vibration fondamentale est la moyenne de celle des cordes des empreintes adjacentes. Ce point neutre est donc au milieu de l'espace qui sépare deux empreintes consécutives. L'origine O, dans la figure **18**, est formée par une corde de longueur nulle. On doit la considérer comme une empreinte d'ordre O, en faisant $K = O$ dans l'expression ci-dessus donnée pour D_K. Cette empreinte d'ordre O est commune à tous les sons.

§ 3. — **Compartiment d'un intervalle.**

Soit à considérer un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q étant premiers entre eux, et soient : N le nombre des vibrations du son,

N^1 le nombre des vibrations du pivot,

n le nombre des vibrations du son qui correspond au support réel,

n_1 le nombre des vibrations du son qui correspond au support virtuel,

Les équations (**10**) et (**14**) ont donné :

$$N = p\,n$$
$$N^1 = q\,n$$
$$N_1 = p\,q\,n$$

Cela signifie que, si l'on prend pour unité l'équidistance des empreintes du support réel, les équidistances des autres sont respectivement :

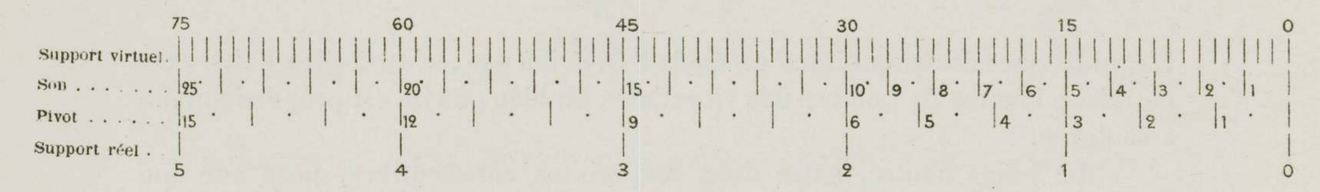
pour le support virtuel $\frac{1}{p\,q}$

pour le pivot $\frac{1}{q}$

pour le son $\frac{1}{p}$

Considérons par exemple l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)$, les empreintes respectives, du son, du pivot et des supports réels et virtuels doivent être tracées, comme sur le schéma (**19**)

(**19**)



La première ligne comprend les empreintes du support virtuel, la seconde celles du son, la troisième celles du pivot et la quatrième celles du support réel. Les points neutres de chacun des sons se trouvent au milieu de l'espace entre deux empreintes consécutives. Nous les avons représentées par des points, seulement pour le pivot et pour le son.

On observe que les empreintes du support réel, quatrième ligne, divisent le schéma en une infinité de compartiments identiques qui ne diffèrent entre eux que par le numéro d'ordre des empreintes et des fenêtres. On pourra donc se borner à ne tracer qu'un seul compartiment. Quant aux numéros d'ordre des empreintes et des fenêtres, on les marquera sur des lignes différentes pour chaque compartiment, conformément au schéma (**20**), dont il sera possible d'augmenter l'échelle. Nous nous dispensons de reproduire les empreintes du support virtuel, qui ne sont pas utiles, pour le calcul des attractions.

(**20**)

	15	14	13	12	11	10	←— troisième compartiment
	10	9	8	7	6	5	←— deuxième compartiment
	5	4	3	2	1	0	←— Premier compartiment
			a	*b*			
Son donné	| ·	| ·	←| ·	|→ ·	| ·	|	
Pivot donné	|		|	|		|	
	3		2	1		0	←— Premier compartiment
	6		5	4		3	←— deuxième compartiment
	9		8	7		6	←— troisième compartiment

Nous nous sommes borné à figurer les points neutres du son, ce sont les seuls

qui interviennent pour indiquer les attractions que donnent chacune des fenêtres du pivot.

Le tracé de cette figure (**20**) forme ce que nous appelons le compartiment d'un intervalle. Les attractions constatées y sont figurées par les flèches *a* et *b*. Les premières proviennent, dans les compartiments successifs des fenêtres 2, 5, 8, etc. ; elles s'exercent sur les empreintes, 3, 8, 13, etc. Elles contribuent donc à faire passer l'intervalle donné $\left(\frac{5}{3}\right)$ à :

$$\left(\frac{3}{2}\right) \quad \left(\frac{8}{5}\right) \quad \left(\frac{13}{8}\right) \text{ etc.}$$

Les attractions *b* contribuent à faire passer l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$ aux valeurs suivantes :

$$\left(\frac{2}{1}\right) \quad \left(\frac{7}{4}\right) \quad \left(\frac{12}{7}\right) \text{ etc.}$$

Les compartiments d'un intervalle portent un numéro d'ordre. En passant d'un compartiment au suivant, les numéros des empreintes homologues augmentent de 5 unités, ceux des fenêtres de 3 unités.

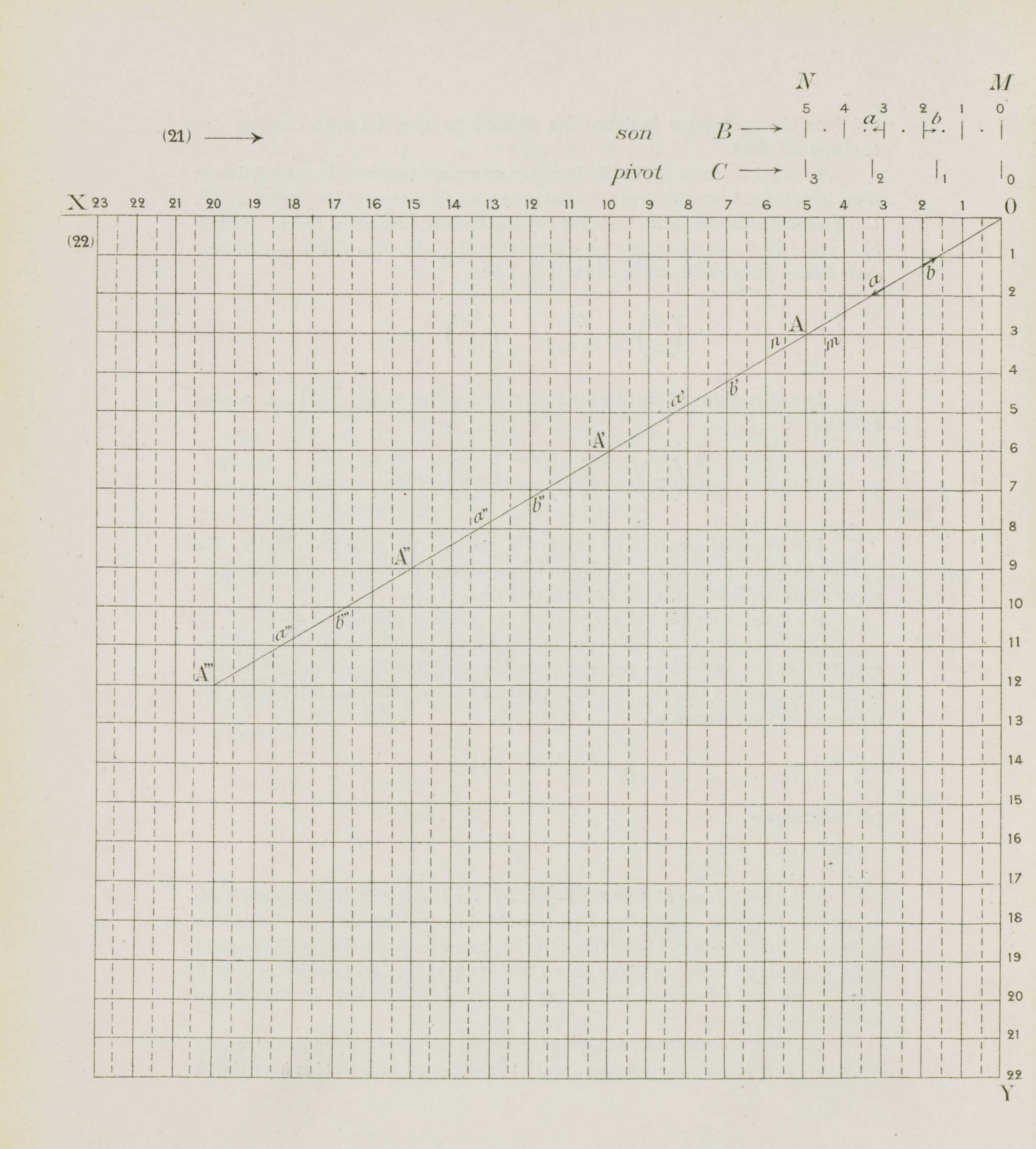
Il est facile de généraliser pour un intervalle quelconque $\left(\frac{p}{q}\right)$.

On doit remarquer enfin que le tracé d'un compartiment est toujours symétrique. Les attractions se présentent donc toujours deux à deux symétriquement et en sens inverse. Les unes tendent à faire croître les intervalles, les autres à les faire décroître.

§ 4. — **Abaque.**

Soit à considérer l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$. Je prends une certaine longueur MN, figure (**21**), longueur que j'adopte pour celle du compartiment de l'intervalle considéré. Sur la ligne B, je divise cette longueur en 5 parties égales ; sur la ligne C, je divise la même longueur en trois parties égales. Les lignes B et C forment les empreintes et les fenêtres d'un compartiment de l'intervalle donné $\left(\frac{5}{3}\right)$.

Traçons, d'autre part, sur la figure (**22**), deux lignes perpendiculaires, ox et oy, sur lesquelles nous portons des divisions égales numérotées à partir du


(21)
(22)
son B
pivot C
N
M
X
Y
0
A
A'
A''
A'''
a
b
n
m
a'
b'
a''
b''
a'''
b'''

point O. Le point A, dont l'abscisse est 5 et l'ordonnée 3, correspond à l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$. Les verticales qui passent par les points de division de OX partagent la ligne OA en 5 parties égales. Les horizontales qui passent par les points de division de OY partagent la même ligne OA en 3 parties égales. La ligne OA peut donc être considérée comme formant un compartiment de l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$. Les points de division signalés sont les empreintes et les fenêtres. Quant aux points neutres du son, ils sont à l'intersection des verticales ponctuées intercalées à mi-distance des autres verticales. Les attractions marquées a et b sur la figure (**21**) correspondent à celles marquées des mêmes lettres sur la figure (**22**), figure que nous appelons abaque des attractions. L'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$ correspond à la pente de la ligne OA sur OY. Les intervalles vers lesquels on est conduit, correspondent au sommet de l'angle droit des petits triangles rectangles a et b. Ces attractions correspondent au premier compartiment. On obtiendrait celles des compartiments suivants, en prolongeant OA jusqu'en A' A'' A''', etc. Les attractions correspondent, dans tous les cas, à de petits triangles rectangles constitués par les verticales et les horizontales continues de l'abaque et par la ligne OA, A', A'', A''', etc., triangles qui ne sont coupés par aucune ligne verticale ponctuée et qui sont : a, b ; a', b' ; a'', b'' ; a''', b''' ; etc. On constate que les attractions des compartiments successifs amènent l'intervalle donné $\left(\frac{5}{3}\right)$ aux valeurs suivantes :

$$a : \left(\frac{3}{2}\right) \qquad b : \left(\frac{2}{1}\right)$$

$$a' : \left(\frac{8}{5}\right) \qquad b' : \left(\frac{7}{4}\right)$$

$$a'' : \left(\frac{13}{8}\right) \qquad b'' : \left(\frac{12}{7}\right)$$

$$a''' : \left(\frac{18}{11}\right) \qquad b''' : \left(\frac{17}{10}\right) \text{ etc.}$$

D'une manière générale, quand on peut passer, par attraction du premier compartiment de l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ à l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$, l'attraction homologue, dans le compartiment d'ordre K, conduit à l'intervalle

$$\left(\frac{P + (K-1)\ p}{Q + (K-1)\ q}\right)$$

Tous les points du quadrillage de l'abaque qui sont sur la bissectrice des axes OX et OY, correspondent à l'unisson. Cette bissectrice correspond

donc au pivot, tandis que la ligne OA, A', etc. correspond au son qui forme avec le pivot l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$. Les points situés dans l'angle de la bissectrice avec OX correspondent à des intervalles positifs ; ceux qui sont dans l'angle de cette bissectrice avec OY correspondent à des intervalles négatifs.

On peut résoudre, au moyen de l'abaque, la plupart des problèmes relatifs aux attractions. Posons-nous, par exemple, la question suivante : Quels sont les intervalles qui peuvent conduire le son, par attraction, à l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$?

Pour qu'une attraction puisse conduire à l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$, il faut que la ligne de base de l'intervalle cherché détache, avec l'horizontale et la verticale du point A, un triangle rectangle qui ne soit coupé par aucune ligne ponctuée. La ligne de base doit donc se trouver comprise entre les deux lignes qui joignent le point O aux points m et n.

La pente de $O\,m$ est $\dfrac{5 - \frac{1}{2}}{3}$, sur $o\,y$

La pente de $O\,n$ est $\dfrac{5 + \frac{1}{2}}{3}$

Les intervalles cherchés sont compris entre ces deux limites, c'est-à-dire

$$\left(\frac{2 \times 5 - 1}{2 \times 3}\right) = \left(\frac{9}{6}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1}{2 \times 3}\right) = \left(\frac{11}{6}\right)$$

Si, au lieu de l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$ on était parti de l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$, l'expression de ces intervalles limites eut été :

$$\left(\frac{2\,P - 1}{2\,Q}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2\,P + 1}{2\,Q}\right) \tag{23}$$

Tout intervalle compris entre ces limites peut conduire à $\left(\frac{P}{Q}\right)$ par attraction.

§ 5. — Règles pour le calcul des attractions.

1er Problème. — Etant donné un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, à quels intervalles peut-il conduire par attraction ?

Nous allons considérer d'abord les attractions du premier compartiment. Soit une fenêtre de ce premier compartiment, fenêtre dont le numéro d'ordre est Q. On a $Q < q$. Le problème revient à trouver quelle est l'empreinte P du son qui est la plus voisine de la fenêtre Q.

Prenons pour unité l'équidistance des empreintes du support virtuel ; l'équidistance des fenêtres du pivot sera p, celle des empreintes du son sera q. La fenêtre Q est à une distance de l'origine égale à Qp. L'empreinte la plus voisine sera donnée par le quotient de Qp par q, à une demi-unité près, par excès ou par défaut. Soit P le quotient ainsi obtenu, l'intervalle cherché est $\left(\frac{P}{Q}\right)$.

L'attraction homologue, dans le compartiment d'ordre K, correspond à la fenêtre

$$Q + (K - 1)\, q$$

Elle aboutit à l'intervalle déjà cité au paragraphe précédent

$$\left(\frac{P + (K-1)\, q}{Q + (K-1)\, p}\right) \tag{24}$$

Quand le reste de la division $\frac{Qp}{q}$ est positif, l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$ est moindre que $\left(\frac{p}{q}\right)$, l'attraction fait décroître l'intervalle ; quand le reste est négatif, l'attraction fait au contraire croître l'intervalle.

Lorsque q est pair, il y a une fenêtre au milieu du compartiment. Comme p et q sont premiers entre eux, p est alors impair. Il y a donc un point neutre du son au milieu du compartiment. La fenêtre $\frac{q}{2}$ tombe ainsi sur le point neutre coté $\frac{p}{2}$. Appliquons la règle précédente à la fenêtre $\frac{q}{2}$ et faisons le quotient $\frac{Qp}{q}$, on trouve

$$\frac{\frac{q}{2} \cdot p}{q} = \frac{p}{2}$$

La fraction $\frac{p}{2}$ donne, à une demi unité près, soit $\frac{p+1}{2}$ soit $\frac{p-1}{2}$. Il y a donc deux solutions. C'est en effet ce qui devait résulter de la superposition d'une fenêtre et d'un point neutre, avec l'attraction indécise. Le son subit une double attraction et peut se dédoubler.

Lorsqu'un son passe, par attraction, de l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ à l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$, il se déplace de la différence

(25) $$\left(\frac{P}{Q}\right) - \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{P\,q}{Q\,p}\right)$$

2e *Problème.* — De quel intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ faut-il partir pour aboutir à l'intervalle donné $\left(\frac{P}{Q}\right)$?

On a vu, au § précédent, que l'intervalle cherché doit simplement satisfaire à la condition d'être compris entre les expressions (23), savoir :

(26) $$\frac{2\,P - 1}{2\,Q} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{2\,P + 1}{2\,Q}$$

Il y a donc une infinité de solutions. Si on se donne, soit p, soit q, ces inégalités donnent des limites dans lesquelles se meut celui des deux nombres qu'on ne se donne pas, ou bien, elles révèlent, ce qui arrive quelque fois, l'impossibilité de trouver ce nombre.

Applications. — Soit à trouver les attractions qui correspondent à l'intervalle $\left(\frac{8}{5}\right)$, dans le premier compartiment.

Nous formerons un tableau comprenant les indications suivantes :

1° Ordre Q de la fenêtre considérée pour chaque attraction ;
2° Valeur de $\frac{Q\,p}{q}$;
3° Quotient P, à une demi unité près, de $Q\,p$ par q.
4° L'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$ auquel on aboutit.
5° Le mouvement du son : $\left(\frac{P\,q}{Q\,p}\right)$.

Q	$\frac{Qp}{q}$	P	$\left(\frac{P}{Q}\right)$	$\left(\frac{Pq}{Qp}\right)$
1	$\frac{1 \times 8}{5}$	2	$\left(\frac{2}{1}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$
2	$\frac{16}{5}$	3	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{15}{16}\right)$
3	$\frac{24}{5}$	5	$\left(\frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{25}{24}\right)$
4	$\frac{32}{5}$	6	$\left(\frac{6}{4}\right)$ ou $\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{15}{16}\right)$
5	$\frac{8}{1}$	8	$\left(\frac{8}{5}\right)$	O

Les intervalles auxquels on aboutirait, en vertu des attractions du second compartiment, seraient :

$$\left(\frac{2+8}{1+5}\right)=\left(\frac{5}{3}\right) \quad \left(\frac{3+8}{2+5}\right)=\left(\frac{11}{7}\right) \quad \left(\frac{5+8}{3+5}\right)=\left(\frac{13}{8}\right) \quad \left(\frac{6+8}{4+5}\right)=\left(\frac{14}{9}\right)$$

— Appliquons le problème inverse (2[e] problème) à l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)$ on a :

$$\frac{2P-1}{2Q} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \frac{2P+1}{2Q} = \frac{7}{4}$$

La condition à satisfaire s'écrit :

$$\frac{5}{4} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{7}{4}$$

Donnons-nous, par exemple, $q=3$, on aura :

$$\frac{15}{4} \leq p \leq \frac{21}{4} \quad \text{ou}$$

$$4-\frac{1}{4} \leq p \leq 5+\frac{1}{4}$$

Les deux valeurs $p = 4$ et $p = 5$ répondent donc à la question et les intervalles cherchés sont :

$$\left(\frac{4}{3}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{5}{3}\right)$$

— Appliquons le même problème à $\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{10}{7}\right)$, on a

$$\frac{2\,P - 1}{2\,Q} = \frac{19}{14} \qquad \frac{2\,P + 1}{2\,Q} = \frac{3}{2}$$

la condition à satisfaire s'écrit :

$$\frac{19}{14} \leq \frac{p}{q} \leq \frac{3}{2}$$

donnons-nous $q = 3$, on obtient :

$$\frac{57}{14} \leq p \leq \frac{9}{2} \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$4 + \frac{1}{14} \leq p \leq 4 + \frac{1}{2}$$

On voit qu'aucun nombre entier p ne répond à la question, il y a impossibilité.

§ 6. — Intervalles primaires, binaires, ternaires, etc.

Les intervalles sont primaires, binaires, ternaires, etc., lorsque la différence des deux termes de la fraction qui les représente est égale à :

$$\pm\ 1 \ , \quad \pm\ 2 \ , \quad \pm\ 3 \ , \quad \text{etc.}$$

Ainsi :

$\left(\frac{7}{6}\right)$ est un intervalle primaire

$\left(\frac{7}{5}\right)$ est un intervalle binaire

$\left(\frac{7}{4}\right)$ est un intervalle ternaire

$\left(\frac{9}{5}\right)$ est un intervalle quaternaire

Les intervalles primaires correspondent à un déplacement qui s'étend entre deux fenêtres consécutives du pivot. Les intervalles binaires correspondent à la somme de deux intervalles primaires adjacents, lorsque les fenêtres extrêmes sont impaires. Les intervalles ternaires correspondent à la somme de trois intervalles primaires adjacents, lorsque les fenêtres extrêmes ne sont pas multiples de 3 et ainsi de suite.

Les intervalles primaires sont de beaucoup les plus importants.

§ 7. — **Formule simplifiée pour les intervalles primaires.**

Soit à considérer un intervalle primaire $\left(\frac{p}{q}\right)$, tel que l'on ait :

$$p = q \pm 1$$

Nous allons montrer que les attractions croissantes, c'est-à-dire celles qui tendent à faire croître l'intervalle, font aboutir le son à d'autres intervalles, qui ont tous pour valeur l'expression :

$$\left(\frac{Kp - E}{Kq - E}\right) \tag{27}$$

dans laquelle, K représente l'ordre du compartiment considéré et E un nombre entier égal ou inférieur à $\frac{q}{2}$.

Nous montrerons de la même manière que les attractions décroissantes conduisent l'intervalle à la valeur :

$$\left(\frac{(K-1)p + E}{(K-1)q + E}\right) \tag{28}$$

K et E ayant la même signification que dans l'expression (27). Quant aux fenêtres opérantes, leur numéro d'ordre est le dénominateur des expressions (27) et (28).

Pour démontrer cette proposition, nous appliquerons la formule du premier problème au § 5 ci-dessus :

$$\frac{Qp}{q} = P, \text{ à une demi-unité près.}$$

Il suffira d'ailleurs de considérer le premier compartiment, nous en déduirons ensuite ce qui concerne les autres.

Considérons, dans le premier compartiment, la fenêtre d'ordre E, ce nombre étant par hypothèse égal ou inférieur à $\frac{q}{2}$. On a :

$$Q = E \qquad p = q \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{Qp}{q} = \frac{E\,(q \pm 1)}{q}$$

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$\frac{E\,(q \pm 1)}{q} = E \pm \frac{E}{q}$$

Comme E est moindre que $\frac{q}{2}$, ou au plus égal à $\frac{q}{2}$, la fraction $\frac{E}{q}$ est égale ou inférieure à $\frac{1}{2}$. Le quotient P cherché est donc égal à E. On a donc :

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{E}{E}\right)$$

Il en résulte que, pour le compartiment d'ordre K, on trouve bien l'expression (**28**), par application de la formule

$$\left(\frac{P + (K-1)\,p}{Q + (K-1)\,q}\right)$$

obtenue au § 4 ci-dessus.

Considérons de même, toujours dans le premier compartiment, la fenêtre symétrique de E, c'est-à-dire, $q - E$, et appliquons encore la formule $\frac{Qp}{q}$, en faisant $Q = q - E$ et $p = q \pm 1$, on trouve :

$$\frac{(q - E)\,(q \pm 1)}{q} = p - E \pm \frac{E}{q}$$

Comme E est moindre ou au plus égal à $\frac{q}{2}$, le quotient P, à une demi unité près n'est autre que $p - E$. On aboutit donc à l'intervalle :

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{p - E}{q - E}\right)$$

Cette formule s'applique au premier compartiment. Si on considère le compartiment d'ordre K, on obtient la formule (**28**).

On doit remarquer que, pour K = 1 et K = 2, dans les expressions (**27**) et (**28**), l'intervalle auquel on aboutit est primaire ; pour $K = 2, 3, 4$, etc., ou $K = 3, 4, 5$, etc., les deux mêmes expressions donnent des intervalles binaires, ternaires, quaternaires, etc.

— Tout ce qui précède s'applique au problème direct des attractions. Nous allons considérer le problème inverse.

Remarquons que les expressions (**27**) et (**28**) sont de la forme :

(**29**)
$$\left(\frac{Mp \pm E}{Mq \pm E}\right)$$

Cela posé, on se donne un intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$, on demande de trouver l'intervalle primaire qui peut y conduire.

Soit M la différence de P et Q ; ces deux nombres doivent pouvoir s'exprimer par les termes de l'expression (**29**), savoir :

$$P = Mp \pm E \qquad Q = Mq \pm E$$

d'où
$$p = \frac{P \mp E}{M} \qquad q = \frac{Q \mp E}{M}$$

Si on attribue à E les valeurs successives 1, 2, 3, 4, etc., jusqu'à ce que le numérateur soit divisible par M, on obtiendra les valeurs de p et q cherchées. Cependant, pour que ces valeurs soient acceptables, il faut que l'on ait :

$$E \leq \frac{q}{2} \qquad \text{c'est-à-dire}$$

$$E \leq \frac{Q \mp E}{2M} \qquad \text{ou bien} \qquad E \leq \frac{Q}{2M \pm 1}$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, les valeurs de p et de q ne répondent pas à la question, il y a impossibilité.

§ 8. — **Qualité des attractions.**

— Les attractions sont croissantes ou décroissantes suivant qu'elles tendent à faire croître ou décroître l'intervalle, en valeur absolue.

— Un intervalle comporte un son et un pivot. On peut prendre comme

pivot, soit le son supérieur, soit le son inférieur. L'intervalle est alors figuré, dans un cas par $\left(\frac{p}{q}\right)$, et dans l'autre par $\left(\frac{q}{p}\right)$.

Le nombre des attractions, dans chaque compartiment, étant égal au nombre des fenêtres (sauf en cas d'attraction indécise où il y en a une de plus), il y aura q attractions dans un cas et p dans l'autre. Le même intervalle compté dans le sens positif ou dans le sens négatif n'a donc pas les mêmes attractions.

Lorsqu'une de ces attractions est la même dans les deux sens, on dit qu'elle est bilatérale. Exemple :

L'intervalle positif $\left(\frac{5}{4}\right)$ donne, par application de la formule (**27**) :

$$\left(\frac{5-1}{4-1}\right) = \left(\frac{4}{3}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{5-2}{4-2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)$$

Le même intervalle négatif $\left(\frac{4}{5}\right)$ donne

$$\left(\frac{4-1}{5-1}\right) = \left(\frac{3}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{4-2}{5-2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)$$

Chacune des deux attractions considérées est donc bilatérale.

Lorsqu'une attraction ne se présente que dans un seul sens, on dit qu'elle est unilatérale. Exemple :

L'intervalle négatif $\left(\frac{5}{6}\right)$ donne, par application de la formule (**27**).

$$\left(\frac{5-3}{6-3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)$$

L'intervalle positif $\left(\frac{6}{5}\right)$ ne peut pas conduire à $\left(\frac{3}{2}\right)$, attendu que le nombre 3 à retrancher de chacun des termes et qui correspond à E de la formule (**27**), est supérieur à moitié du dénominateur 5.

— On dit qu'une attraction est réciproque, lorsqu'elle permet de passer aussi bien d'un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ à un autre $\left(\frac{P}{Q}\right)$ que de revenir du second au premier.

Pour qu'une attraction soit réciproque, il faut et il suffit que la différence $Qp - Pq$ soit moindre que moitié du plus petit des deux nombres q ou Q.

— Lorsqu'on envisage un intervalle primaire, l'application des formules (**27**) ou (**28**) permet de l'augmenter ou de le diminuer en le conduisant à l'un ou à l'autre des intervalles primaires adjacents. L'intervalle $\left(\frac{5}{4}\right)$ par

exemple donne, soit $\left(\frac{5-1}{4-1}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)$ soit $\left(\frac{5+1}{4+1}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)$ les attractions qui commandent ces mouvements se nomment attractions principales croissantes ou décroissantes.

Le mouvement du son est donné par les différences :

$$\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{16}{15}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{25}{24}\right)$$

On remarque que le numérateur est formé par le carré du numéro d'ordre de l'empreinte commune aux deux intervalles adjacents, tandis que le dénominateur est égal à ce carré diminué de l'unité. Tous les mouvements qui résultent des attractions principales sont donc les suivants :

$$\left(\frac{4}{3}\right),\ \left(\frac{9}{8}\right),\ \left(\frac{16}{15}\right),\ \left(\frac{25}{24}\right),\ \left(\frac{36}{35}\right),\ \left(\frac{49}{48}\right),\ \left(\frac{64}{63}\right),\ \left(\frac{81}{80}\right)$$

ou leurs inverses, suivant que le déplacement est positif ou négatif. Les intervalles ainsi obtenus ont une importance capitale, on le verra dans la suite. Le plus petit d'entre eux $\left(\frac{81}{80}\right)$ forme ce qu'on appelle le comma mineur. On ne va pas au delà. Le suivant serait $\left(\frac{100}{99}\right)$, il est exclu parce que, ainsi qu'on le démontrera, le dénominateur contient le facteur premier 11.

— On désigne sous le nom d'attractions majeures celles qui font passer le son d'un intervalle primaire, à un autre intervalle primaire, moyennant le plus grand déplacement possible.

Ces attractions se déduisent des formules (**27**) et (**28**) en attribuant à E la plus grande valeur possible, soit $\frac{q}{2}$ si q est pair, soit $\frac{q-1}{2}$ si q est impair.

Ainsi les attractions majeures, pour l'intervalle $\left(\frac{5}{4}\right)$, donnent :

$$\left(\frac{5-2}{4-2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{5+2}{4+2}\right) = \left(\frac{7}{6}\right)$$

Pour l'intervalle $\left(\frac{6}{5}\right)$, elles donnent :

$$\left(\frac{6-2}{5-2}\right) = \left(\frac{4}{3}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{6+2}{5+2}\right) = \left(\frac{8}{7}\right)$$

Les attractions majeures des intervalles $\left(\frac{q \pm 1}{q}\right)$ ne sont jamais réciproques en croissant, quand q est pair. Elles le sont toujours en décroissant, quand q est pair. Si, au contraire, q est impair, pour que les attractions croissantes soient réciproques, il faut que l'on ait $q \leq 3$; cela donne : $\left(\frac{0}{1}\right)$, $\left(\frac{2}{1}\right)$, $\left(\frac{4}{3}\right)$ ou enfin $\left(\frac{2}{3}\right)$. Les attractions majeures décroissantes sont toujours réciproques.

CHAPITRE III

Théorie des trois Sons

§ 1. — Cas dans lequel un son se dédouble.

Le mouvement d'un son est observé par une fenêtre du pivot. Pour que ce son puisse se dédoubler, il faut qu'il puisse prendre deux directions en vertu des attractions qui résultent de cette fenêtre. Ce cas ne se produit que si la fenêtre tombe sur un point neutre du son.

Si un son fait avec le pivot un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, q étant pair, on a remarqué que, au milieu de chaque compartiment, il y a une fenêtre qui tombe sur un point neutre du son.

Réciproquement, pour qu'une fenêtre puisse tomber sur un point neutre du son, il faut que, dans l'expression de l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, q soit pair.

Soit en effet un son S, faisant avec le pivot un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, p et q étant premiers entre eux. Les points neutres de ce son correspondent aux empreintes impaires d'un son S' placé à une octave au-dessus de S. L'intervalle entre S' et le pivot sera :

$$\left(\frac{p}{q}\right) + \left(\frac{2}{1}\right) = \left(\frac{2\,p}{q}\right)$$

Deux cas sont alors à considérer :

1° — q est impair. La fraction $\frac{2\,p}{q}$ est irréductible ; toutes les empreintes

du support réel de S' sont multiples de $2\,p$. Elles sont toutes paires, donc aucune fenêtre du pivot ne porte sur des points neutres du son.

2° — q est pair. La fraction $\left(\frac{2\,p}{q}\right)$ se réduit à $\left(\frac{p}{\frac{q}{2}}\right)$. Les empreintes du support réel de S' sont multiples de p. Comme p est impair, les multiplicateurs impairs de p correspondront à des points neutres du son. Les fenêtres correspondantes seront des multiples impairs de $\frac{q}{2}$, soit $(2\,K+1)\,\frac{q}{2}$.

§ 2. — **Mouvement des sons dans le dédoublement**.

Considérons une fenêtre f (30) tombant sur un point neutre N d'un son, point neutre compris entre deux empreintes consécutives E et E', d'ordre p et $p+1$. La position du point neutre N est à l'intervalle $\left(\frac{2p+1}{2}\right)$ de l'empreinte 1. Les positions des empreintes E et E' sont caractérisées par les intervalles $\left(\frac{p}{1}\right)$ et $\left(\frac{p+1}{1}\right)$.

Les attractions qui résultent de la fenêtre f donnent au son les déplacements suivants :

En descendant de E à N : $\left(\frac{p}{1}\right) - \left(\frac{2\,p+1}{2}\right) = \left(\frac{2\,p}{2\,p+1}\right)$

En montant de E' à N : $\left(\frac{p+1}{1}\right) - \left(\frac{2\,p+1}{2}\right) = \left(\frac{2\,p+2}{2\,p+1}\right)$

(30)

$$\begin{array}{ccc} E' & N & E \\ | \longrightarrow & \cdot & \longleftarrow | \\ p+1 & \frac{2\,p+1}{2} & p \\ & | & \\ & f & \end{array}$$

Le son primitif, d'une part, et les deux sons dédoublés forment ainsi une série de trois sons, dont les intervalles comptés à partir de la position initiale sont :

(31) $$\left(\frac{2\,p}{2\,p+1}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2\,p+2}{2\,p+1}\right)$$

Ces trois sons portent sur un même support réel, formé par le son implicite d'ordre $2p + 1$ du son initial.

On remarque que les nombres des vibrations de ces trois sons sont respectivement proportionnels à trois nombres consécutifs, dont celui du milieu est impair, savoir :

$$2p \qquad 2p+1 \qquad 2p+2 \tag{32}$$

Enfin, lorsqu'on envisage l'intervalle d'octave $\left(\frac{1}{2}\right)$, on constate que tous les points neutres du son portent sur des fenêtres du pivot. Cet intervalle comporte donc tous les dédoublements possibles, en considérant successivement toutes les fenêtres du pivot.

(33)

7		6		5		4		3		2		1		0
I	·	I	·	I	·	I	·	I	·	I	·	I	·	I
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

§ 3. — **Équilibre des sons simultanés. — Son préalable.**

Considérons un point neutre quelconque d'un son, soit $\left(\frac{2p+1}{2}\right)$ la position de ce point neutre. Admettons que la première fenêtre du pivot porte sur ce point neutre ; on peut remarquer qu'alors le son et le pivot forment un intervalle $\left(\frac{2p+1}{2}\right)$. Le son peut se dédoubler sous l'action de la fenêtre n° 1. Le pivot forme alors un son implicite commun aux deux sons dédoublés, lesquels sont par suite en équilibre absolu sur le pivot. Le son primitif part donc d'une position instable, sur le pivot, pour aboutir après dédoublement à deux positions absolument stables.

Le son primitif forme ainsi un son préalable, qui a la priorité sur les autres qui ne sont que consécutifs du premier, mais qui s'arrêtent dans une position d'équilibre.

On a supposé, dans ce qui précède, que la fenêtre opérante avait le numéro 1 ; mais on peut raisonner d'une manière analogue avec une fenêtre quelconque du pivot, qui coïnciderait avec le point neutre $\left(\frac{2p+1}{2}\right)$. La fenêtre opérante forme en effet l'empreinte n° 1 du support réel commun aux deux

sons dédoublés ; or, les empreintes du support réel constituent les seules fenêtres du pivot qui conservent toute leur clarté. Nos sens substituent en quelque sorte ce support réel au pivot primitif ; c'est ainsi que les deux sons dédoublés se trouvent encore en quelque sorte en équilibre absolu sur ce nouveau pivot, comme dans le cas précédent.

§ 4. — **Seconde manière de dédoublement.**

Considérons un son et un pivot tel qu'une fenêtre porte sur un point neutre du son. Cette coïncidence se produit au milieu de chaque compartiment. Il y a donc plusieurs fenêtres du pivot qui portent sur autant de points neutres du son.

Considérons deux de ces fenêtres f et f_1, (figure **34**) portant sur les points neutres $\left(\frac{2p+1}{2}\right)$ et $\left(\frac{2q+1}{2}\right)$. Admettons un instant que les fenêtres f et f_1 puissent être toutes deux opérantes ; le dédoublement pourrait alors s'effectuer, par l'attraction montante sur l'une, et par l'attraction descendante sur l'autre.

(34) $\quad q+1 \quad \frac{2q+1}{2} \quad q \qquad\qquad p+1 \quad \frac{2p+1}{2} \quad p$

$\qquad\qquad f_1 \qquad\qquad\qquad\qquad f$

Les trois sons correspondraient alors aux intervalles (**35**), comptés à partir du son initial.

$$(35) \qquad \left(\frac{2\,p}{2\,p+1}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2\,q+2}{2\,q+1}\right)$$

Si les fenêtres opérantes f et f_1 eussent été les mêmes, on aurait le même support réel, pour les intervalles (**35**), c'est-à-dire :

$$2\,q \;+\; 1 \;=\; 2\,p \;+\; 1$$

Cela entraîne $p = q$ et on retomberait sur l'expression (31) obtenue précédemment.

Si les fenêtres opérantes f et f_1 ne sont pas les mêmes, pour que nos sens puissent constater la simultanéité de l'attraction, il faut que ces deux fenêtres différentes exercent leurs attractions sur une même empreinte du son émis, empreinte qui se dédouble par le fait de cette double attraction. Ce cas se présente quand les numérateurs des expressions (35), qui correspondent aux numéros d'ordre des empreintes, sont les mêmes. Cela entraîne l'égalité :

$$2q + 2 = 2p, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad q = p - 1$$

Remplaçons q par cette valeur dans l'expression (35), on trouve, pour la position des trois sons :

$$(36) \qquad \left(\frac{2p}{2p+1}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p}{2p-1}\right)$$

C'est une seconde manière du dédoublement. Les numérateurs des fractions étant les mêmes, les trois sons portent sur un même support virtuel.

On remarque que les vibrations des trois sons sont proportionnelles aux inverses de trois nombres entiers consécutifs, dont celui du milieu est pair, savoir :

$$(37) \qquad \frac{1}{2p+1} \qquad \frac{1}{2p} \qquad \frac{1}{2p-1}$$

Enfin, lorsqu'on considère l'intervalle d'octave (figure 33), on voit qu'une empreinte quelconque, l'empreinte n° 2 par exemple, peut se dédoubler, en montant par attraction de la fenêtre 3, en descendant par attraction de la fenêtre 5. L'intervalle $\left(\frac{1}{2}\right)$ comporte donc tous les dédoublements possibles selon la seconde manière.

Comme dans le premier cas, le son initial était en équilibre instable sur l'une comme sur l'autre des fenêtres opérantes. Après le dédoublement, chacun des sons aboutit à un état d'équilibre sur chacune des fenêtres, mais cet équilibre n'est plus absolu, il n'est que relatif.

Quoiqu'il en soit on constate encore que le son primitif forme un son préalable qui part d'une position instable et aboutit, en se dédoublant, à deux positions stables, mais dont l'équilibre n'est que relatif aux fenêtres opérantes.

§ 5. — Concentration de deux sons. — Instabilité. — Sons préalables.

Deux sons différents, en équilibre instable sur une fenêtre, se déplacent en vertu des attractions de cette fenêtre, de manière à se confondre tous deux en un son unique ; telle est la définition initiale de la théorie des 3 sons, à l'égard de la concentration.

Considérons les 3 sons après que la concentration a été opérée. Soit f la fenêtre et E les empreintes confondues en une seule sur la fenêtre f figure (38).

(38)

$$\begin{array}{ccccc} N' & & E & & N \\ \cdot & \longleftarrow & | & \longrightarrow & \cdot \\ \frac{2p+1}{2} & & p & & \frac{2p-1}{2} \\ & & | & & \\ & & f & & \end{array}$$

Supposons que l'empreinte E soit d'ordre p. La position des points neutres voisins N et N' est caractérisée par les fractions $\frac{2p-1}{2}$ et $\frac{2p+1}{2}$. Pour obtenir la position primitive instable de chacun des deux sons confondus, il suffit de déplacer l'empreinte E, en montant et en descendant, jusqu'à ce que les points neutres N' et N viennent se placer sur la fenêtre f, conformément à la figure (39).

(39)

$$\begin{array}{ccc} & \frac{2p+1}{2} & \\ & \cdot \longleftarrow | & p \\ p \;\; | \longrightarrow & \cdot \;\frac{2p-1}{2} & \\ & | \, f & \end{array}$$

La position initiale des sons, avant qu'ils soient confondus, comptée à partir de la position concentrée consécutive, est définie par les intervalles suivants :

(40) $$\left(\frac{2p-1}{2p}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p+1}{2p}\right)$$

Les trois sons portent sur un même support réel, formé par le son implicite d'ordre $2p$ du son concentré.

Considérons l'intervalle $\left(\frac{1}{1}\right)$, formant unisson, on constate que, toutes les empreintes du son portant sur toutes les fenêtres du pivot, on peut en tirer toutes les concentrations possibles, en opérant comme on vient de le faire.

$$(41)\qquad \begin{array}{lccccccccccc} & 5 & \frac{9}{2} & 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \text{Son} \longrightarrow & | & \cdot & | & \cdot\longleftarrow & | & \longrightarrow\cdot & | & \cdot & | & \cdot & | \\ \text{Pivot} \longrightarrow & | & & | & & | & & | & & | & & | \\ & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 \end{array}$$

Si on considère par exemple la fenêtre 3, on voit que les trois sons se forment ainsi :

$$\left(\frac{5}{6}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{7}{6}\right)$$

Les deux sons primitifs sont préalables, qui préparent la venue du son concentré, lequel est consécutif des deux autres. Les sons préalables partent d'une position instable, en se concentrant, ils aboutissent à une position stable.

§ 6 — **Seconde manière de concentration.**

Considérons les deux sons qui doivent se concentrer, non pas dans leur position initiale, mais dans la position commune à laquelle ils aboutissent. Il est clair que, dans cette position, il existe une série de fenêtres du pivot qui portent sur des empreintes du son concentré. Soient f et f_1 deux de ces fenêtres portant sur les empreintes E et E_1. Pour obtenir les positions initiales instables des deux sons qui doivent se concentrer, nous allons déplacer le son du schéma (42), de manière que le point neutre N tombe sur la fenêtre f en montant, et de manière que le point neutre N_1 tombe sur la fenêtre f_1 en descendant.

$$(42)\qquad \begin{array}{cccccccc} & E_1 & N_1 & & N & E & \\ & |\longrightarrow & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdots & \cdot\longleftarrow & | & \cdot \\ \frac{2q+1}{2} & q & \frac{2q-1}{2} & & \frac{2p+1}{2} & p & \frac{2p-1}{2} \\ & |_{f_1} & & & & |_{f} & \end{array}$$



On aura pour la position des trois sons :

$$\left(\frac{2q-1}{2q}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p+1}{2p}\right)$$

Les deux sons se trouvent ainsi en équilibre instable sur deux fenêtres f et f_1, que nous supposons toutes deux opérantes.

Si les deux fenêtres f et f_1 eussent été confondues, on aurait eu le même support réel, c'est-à-dire $2p = 2q$ ou $p = q$ et nous retomberions sur l'expression (**40**).

Si les fenêtres f et f_1 sont différentes, pour que nos sens puissent saisir et constater la simultanéité d'attraction, il faut que, dans la position initiale instable, chacune des deux fenêtres porte sur le même point neutre de chacun des deux sons. Autrement dit, il faut que l'on ait :

$$\frac{2q-1}{2} = \frac{2p+1}{2}$$

ce qui revient à $q = p + 1$. Les trois sons occupent alors les trois positions suivantes, comptées à partir du son de concentration :

(**43**) $$\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p+1}{2p}\right)$$

Les trois sons ont alors le même support virtuel. C'est en cela que consiste la seconde manière de concentration.

On remarque que les vibrations sont proportionnelles aux inverses de trois nombres entiers consécutifs, dont celui du milieu est impair :

(**44**) $$\frac{1}{2p+2} \qquad \frac{1}{2p+1} \qquad \frac{1}{2p}$$

Enfin, lorsqu'on considère l'intervalle d'unisson, schéma (**41**) on voit qu'un point neutre quelconque, celui côté $\frac{3}{2}$ par exemple, permet d'obtenir, en le portant successivement sur les empreintes 1 et 2 du pivot, les trois sons par concentration

$$\left(\frac{4}{3}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2}{3}\right)$$

L'intervalle d'unisson comporte donc toutes les formations de trois sons par concentration selon la seconde manière.

Comme dans la première manière, les deux sons primitifs sont préalables ; ils sont en équilibre instable sur l'une comme sur l'autre des fenêtres opérantes. Le son de concentration est consécutif des deux premiers, il correspond à une position d'équilibre.

§ 7. — **Tableaux des trois sons, par dédoublement et par concentration.**

Nous allons résumer dans les quatre tableaux (**45**), (**46**), (**47**) et (**48**) tous les groupements de trois sons que l'on peut faire en vertu de ce qui précède. On verra dans la suite qu'il convient de s'arrêter pratiquement au nombre 10, nous ne sommes donc pas allé au delà.

DÉDOUBLEMENT PREMIÈRE MANIÈRE

⟵ · ⟶

			Intervalles : ⟶	$\left(\frac{2p}{2p+1}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)$	Nombres : ⟶	$2p$	$2p+1$	$2p+2$
(**45**)	(P)	$p=0$	donne	$\left(\frac{0}{1}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$	—	0	1	2
	(C)	$p=1$	—	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	—	2	3	4
	(APM)	$p=2$	—	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)$	—	4	5	6
	(AI)	$p=3$	—	$\left(\frac{6}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{8}{7}\right)$	—	6	7	8
		$p=4$	—	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{10}{9}\right)$	—	8	9	10

DÉDOUBLEMENT SECONDE MANIÈRE

← · →

			Intervalles : → $\left(\frac{2p}{2p+1}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p}{2p-1}\right)$	Nombres : →	$\frac{1}{2p+1}$	$\frac{1}{2p}$	$\frac{1}{2p-1}$
(46)	(C)	$p=1$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$	—	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
	(APm)	$p=2$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	—	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
	(A I)	$p=3$	$\left(\frac{6}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)$	—	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
		$p=4$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{8}{7}\right)$	—	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$

CONCENTRATION PREMIÈRE MANIÈRE

· → ← ·

			Intervalles : → $\left(\frac{2p-1}{2p}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p+1}{2p}\right)$	Nombres : →	$2p-1$	$2p$	$2p+1$
(47)	(C)	$p=1$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	—	1	2	3
	(APM)	$p=2$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	—	3	4	5
	(A I)	$p=3$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{7}{6}\right)$	—	5	6	7
		$p=4$	$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	—	7	8	9

CONCENTRATION SECONDE MANIÈRE

$\longrightarrow \longleftarrow$

			Intervalles : $\rightarrow$ $\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p+1}{2p}\right)$	Nombres : $\rightarrow$	$\frac{1}{2p+2}$	$\frac{1}{2p+1}$	$\frac{1}{2p}$
(48)	(P)	$p=0$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{1}{0}\right)$	—	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{0}$
	(C)	$p=1$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	—	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
	(APm)	$p=2$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	—	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
	(AI)	$p=3$	$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{7}{6}\right)$	—	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
		$p=4$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{10}\right)$	—	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$

L'ensemble des tableaux qui précèdent contiennent en eux toutes les idées premières fondamentales de la musique.

On remarquera que nous avons affecté de lettres les diverses lignes de chacun des tableaux :

Les lignes marquées *P* nous conduiront à la propriété fondamentale de périodicité.

Les lignes marquées *C* engendreront la cadence.

Les lignes marquées *APM* ou *APm* donneront les accords parfaits majeurs et mineurs.

Les lignes marquées *AI* nous conduiront aux accords imparfaits.

Nous discuterons donc successivement chacun des éléments de ces tableaux, mais, auparavant, il est essentiel de développer une nouvelle notion de l'attraction, indispensable pour les explications ultérieures.

CHAPITRE IV

Les Attractions indirectes

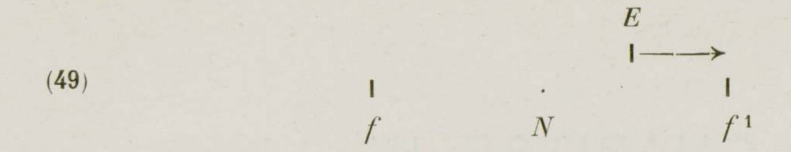
§ 1. — **Nouvelle conception de l'attraction.**

Si l'on se reporte à la fin du § 6, chapitre I, on trouvera exposée la conception primordiale que nous avons donnée de l'attraction des sons. Cette conception reposait tout entière sur l'observation, à travers une fenêtre fixe du pivot, du trouble apporté aux vibrations des cordes de l'oreille, par un son supposé mobile. La figure (**3**) montre l'empreinte *b* du son mobile dirigeant son mouvement de manière à aboutir sur la fenêtre *f*, dans un état d'équilibre. Nous désignerons à l'avenir l'attraction ainsi définie sous le nom d'attraction directe.

Les attractions directes résultent, comme on vient de le voir, d'une fenêtre du pivot par laquelle on observe le trouble occasionné par le son. Ces attractions n'ont donc à tenir compte que des points neutres du son. Les points neutres du pivot ne sont d'aucune influence.

On peut concevoir les choses d'une autre manière et admettre qu'ayant choisi une empreinte du son mobile, on la promène en quelque sorte sur les cordes de l'oreille, pour observer le trouble correspondant aux mouvements vibratoires qui résultent du pivot. Les choses se présentent alors comme sur la figure (**49**), qui est l'inverse de la figure (**3**).

(49)



f et f^1 sont deux fenêtres consécutives du pivot fixe, *E* est une empreinte du son mobile à travers laquelle on observe, en la déplaçant, le trouble qui est résulté du mouvement vibratoire du pivot. Ce trouble diminue, à mesure que *E* s'approche de f^1, comme l'indique la flèche. C'est en cela que consiste la nouvelle conception de l'attraction, à laquelle nous donnerons le nom d'attraction indirecte.

Les attractions directes et indirectes d'un même son sur un pivot peuvent se confondre, comme on le voit sur la figure (**50**).

(50)

E N¹ E₁
Son →
Pivot →
f f¹

Le mouvement se fait dans le même sens parce que le trouble observé, soit sur le son à l'aide de la fenêtre f^1, soit sur le pivot à travers l'empreinte *E*, va en diminuant dans le sens du mouvement pour chacun des deux cas.

(51)

E N₁ E¹
son →
pivot →
f N f¹
attraction directe

E N₁ E¹
son →
pivot →
f N f¹
attraction indirecte

Considérons au contraire la figure (**51**) dans laquelle nous reproduisons deux fois la même disposition relative du son et du pivot. La partie supérieure

de la figure correspond à l'attraction directe exercée par la fenêtre f^1 sur l'empreinte E^1 . La partie inférieure s'applique à l'attraction indirecte exercée par l'empreinte E sur la fenêtre f^1 ; dans l'attraction indirecte nous n'avons pas à tenir compte du point neutre N_1, puisque nous observons le trouble du pivot à travers l'empreinte E. Ainsi, la même fenêtre f^1 peut recevoir deux empreintes différentes, E^1 ou E selon que l'on considère l'attraction directe ou l'attraction indirecte.

§ 2. — **Calcul des attractions indirectes**.

Pour se rendre compte des attractions indirectes, on reprendra l'idée de compartiment telle qu'elle résulte du § 3, chapitre II. Au lieu d'y figurer les points neutres du son, on figurera ceux du pivot. On verra alors quels mouvements il faut faire subir aux empreintes, pour qu'elles se rendent sur la fenêtre voisine sans passer à travers aucun point neutre du pivot.

Les attractions indirectes de l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ ne sont pas autre chose que les attractions directes de l'intervalle $\left(\frac{q}{p}\right)$, mais avec des déplacements en sens contraire. C'est une chose analogue au mouvement relatif. Dans cette interversion de $\left(\frac{p}{q}\right)$ en $\left(\frac{q}{p}\right)$ nous rendons, en quelque sorte indument, le pivot primitif mobile puisque nous le traitons comme un son ; inversement nous immobilisons indûment le son en le traitant comme un pivot. Pour remettre les choses au point, il faut déplacer l'ensemble, de l'intervalle nécessaire pour ramener le pivot à la fixité. C'est ainsi que le mouvement du son se trouve être égal et contraire à celui qui résulte de l'attraction directe de l'intervalle $\left(\frac{q}{p}\right)$.

Ces explications dispensent de faire une étude détaillée des attractions indirectes, attractions qu'il serait facile d'étudier directement, comme dans la figure (**52**) applicable à l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$.

(**52**)

5 4 3 2 1 0
Son → | |—→ ←-| |-→ ←--| |
Pivot → | · | · | · |
3 2 1 0

Si on compare ce schéma à celui qui donnerait les attractions directes

du même intervalle, figure (**53**), on voit que ces dernières comportent deux mouvements de moins :

(**53**)

	5		4		3		2		1		0
Son →	I	·	I	·	←I	·	I→	·	I	·	I
Pivot →	I			I				I			I
	3			2				1			0

On aurait pu également considérer l'intervalle retourné $\left(\frac{3}{5}\right)$, avec la figure (**54**), et chercher les attractions directes, mais en prenant les déplacements en sens contraire.

(**54**)

	3		2		1		0
Pivot primitif →	I	·	←—I→	·	←I—→	·	I
Son primitif →	I	I	I	I	I		I
	5	4	3	2	1		0

On pourrait de même appliquer l'abaque et les formules du chapitre II à l'intervalle retourné, mais en prenant toujours les déplacements en sens inverse.

On constate que toute attraction directe bilatérale, est également indirecte bilatérale. Toute attraction directe unilatérale est aussi indirecte unilatérale, mais dans l'autre sens.

§ 3. — **De l'équilibre absolu avec les attractions indirectes.**

Dans les attractions directes, l'équilibre absolu existe quand toutes les fenêtres du pivot sont couvertes par des empreintes du son. Avec les attractions indirectes, l'équilibre absolu sera obtenu quand toutes les empreintes du son, sans exception, porteront sur des fenêtres du pivot. L'équilibre absolu indirect sera donc constaté toutes les fois que le son sera un son implicite du pivot. On se souvient que l'équilibre absolu direct correspondait au cas où le son est un son harmonique du pivot.

Il suit de là que, lorsqu'un son est entièrement arrêté en vertu d'une

des conceptions sur les attractions, il peut reprendre son mouvement en vertu de l'autre conception. L'équilibre complet et total ne peut exister qu'avec l'unisson.

§ 4. — Dédoublement indirect d'un son.

Pour qu'un son puisse se dédoubler selon le mode indirect, il faut et il suffit qu'une empreinte du son tombe sur un point neutre du pivot. Cette condition est toujours remplie, pour un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, quand le numérateur est pair.

Le dédoublement peut alors se faire de deux manières, soit par analogie avec ce qui a été expliqué au chapitre III § 2, soit par analogie avec le § 4 du même chapitre.

— Dédoublement indirect, première manière, une seule fenêtre opérante :

(55)

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ \longleftarrow & | & \longrightarrow \\ | & \cdot & | \\ p+1 & \dfrac{2p+1}{2} & p \end{array}$$

Intervalles comptés à partir du son initial :

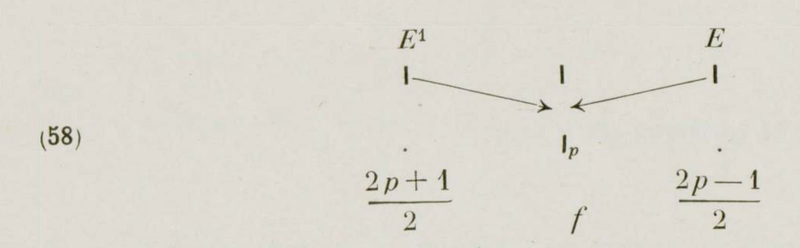
(56) $$\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p+1}{2p}\right)$$

Nombres proportionnels aux vibrations :

(57) $$\frac{1}{2p+2} \qquad \frac{1}{2p+1} \qquad \frac{1}{2\,p}$$

— Dédoublement indirect, seconde manière, deux empreintes opérantes E et E^1 sur une même fenêtre f:

(58)



Intervalles :

(59) $$\left(\frac{2p-1}{2p}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p+1}{2p}\right)$$

Nombres proportionnels aux vibrations :

(60) $$2p-1 \qquad 2p \qquad 2p+1$$

On constate que les expressions (56) et (57) sont les mêmes que (43) et (44) du chapitre III, § 6, et que les expressions (59) et (60) sont les mêmes que (40), chapitre III, § 5 et l'expression correspondante des nombres au même §. On conclut que trois sons qui se présentent dans des conditions propices pour un dédoublement indirect sont les mêmes que ceux qui correspondent à la concentration directe. Le parcours des sons se fait en sens inverse. De plus, la première manière dans un cas correspond à la seconde dans l'autre.

§ 5. — **Concentration indirecte de 2 sons.**

Sans qu'il soit besoin d'insister plus qu'il ne convient, on verrait que la concentration indirecte correspond toujours à des positions des sons qui

conviennent pour un dédoublement direct. Le mouvement se fait en sens contraire ; la première manière dans un cas correspond à la seconde manière dans l'autre.

— Concentration indirecte première manière :

Intervalles :

(61) $$\left(\frac{2p}{2p+1}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p}{2p-1}\right)$$

Nombres :

(62) $$\frac{1}{2p+1} \qquad \frac{1}{2p} \qquad \frac{1}{2p-1}$$

— Concentration indirecte seconde manière :

Intervalles :

(63) $$\left(\frac{2p}{2p+1}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)$$

Nombres :

(64) $$2p \qquad 2p+1 \qquad 2p+2$$

§ 6. — Tableaux des trois sons par dédoublement ou concentration indirects.

DÉDOUBLEMENT INDIRECT PREMIÈRE MANIÈRE

	Intervalles :			Nombres :		
	$\left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p+1}{2p}\right)$	$\frac{1}{2p+2}$	$\frac{1}{2p+1}$	$\frac{1}{2p}$
$p=0$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{1}{0}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{0}$
$p=1$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$p=2$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$p=3$	$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{7}{6}\right)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
$p=4$	$\left(\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$

DÉDOUBLEMENT INDIRECT SECONDE MANIÈRE

	Intervalles :			Nombres :		
	$\left(\frac{2p-1}{2p}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p+1}{2p}\right)$	$2p-1$	$2p$	$2p+1$
$p=1$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	1	2	3
$p=2$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	3	4	5
$p=3$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{7}{6}\right)$	5	6	7
$p=4$	$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	7	8	9

CONCENTRATION INDIRECTE PREMIÈRE MANIÈRE

Intervalles :	$\left(\frac{2p}{2p+1}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p}{2p-1}\right)$	Nombres :	$\frac{1}{2p+1}$	$\frac{1}{2p}$	$\frac{1}{2p-1}$
$p=1$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
$p=2$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$p=3$	$\left(\frac{6}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)$		$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
$p=4$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{8}{7}\right)$		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$

CONCENTRATION INDIRECTE SECONDE MANIÈRE

Intervalles :	$\left(\frac{2p}{2p+1}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2p+2}{2p+1}\right)$	Nombres :	$2p$	$2p+1$	$2p+2$
$p=0$	$\left(\frac{0}{1}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$		0	1	2
$p=1$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$		2	3	4
$p=2$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)$		4	5	6
$p=3$	$\left(\frac{6}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{8}{7}\right)$		6	7	8
$p=4$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{10}{9}\right)$		8	9	10

CHAPITRE V

Faisceaux harmoniques

Pour préciser les notions qui précèdent, il est utile d'en donner une interprétation géométrique, au moyen de l'abaque généralisée. Nous dirons néanmoins que la lecture de ce chapitre n'est pas indispensable pour comprendre la suite.

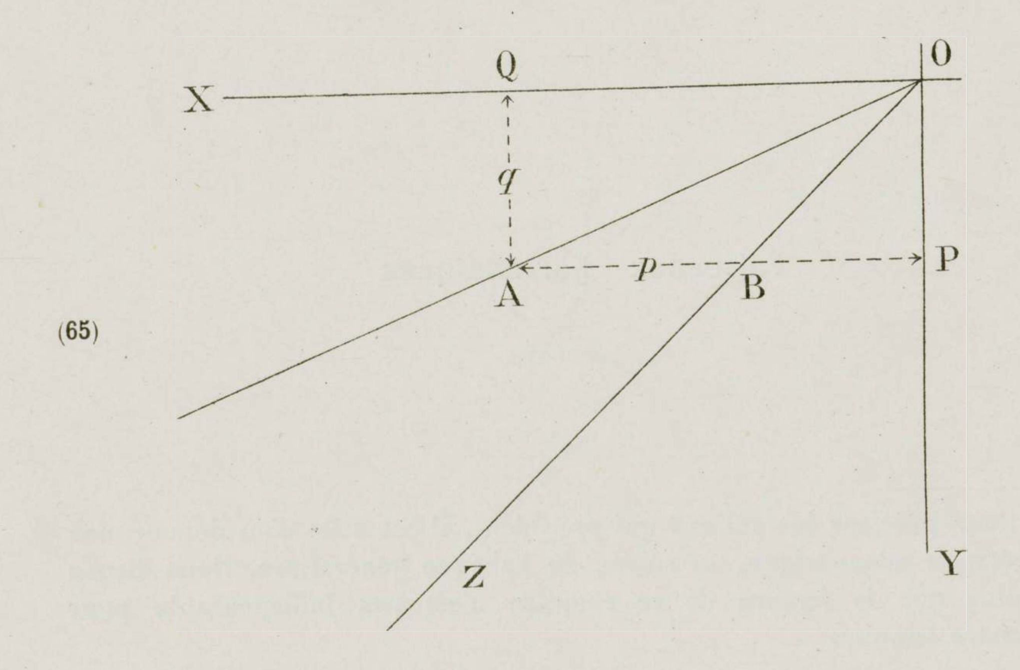
§ 1. — **Généralisation de l'abaque.**

L'abaque a été formée au moyen de deux droites OX et OY, rectangulaires, sur lesquelles on prend à partir de l'origine O une série de points équidistants qui servent de point de départ à un quadrillage. Chaque point d'intersection A, figure (**65**), de deux lignes du quadrillage, ayant pour coordonnées les nombres p et q, correspond à l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$. Comme cet intervalle se trouve représenté en fait par le coëfficient angulaire de la droite OA sur OY, on peut dire que la droite OA elle-même figure le son, tandis que la ligne OZ bissectrice des axes, représente le pivot.

Toutes les considérations sur l'abaque ne changeraient pas si les axes au lieu d'être rectangulaires étaient obliques. Les carrés du quadrillage seraient remplacés par des losanges. Bien plus, on peut adopter une échelle

différente pour représenter les abscisses et les ordonnées. Les losanges sont alors remplacés par des parallélogrammes. Dans tous les cas, le pivot OZ est figuré par la droite dont tous les points ont des abscisses égales aux ordonnées selon la convention des échelles. Les intervalles sont encore les coëfficients

(65)



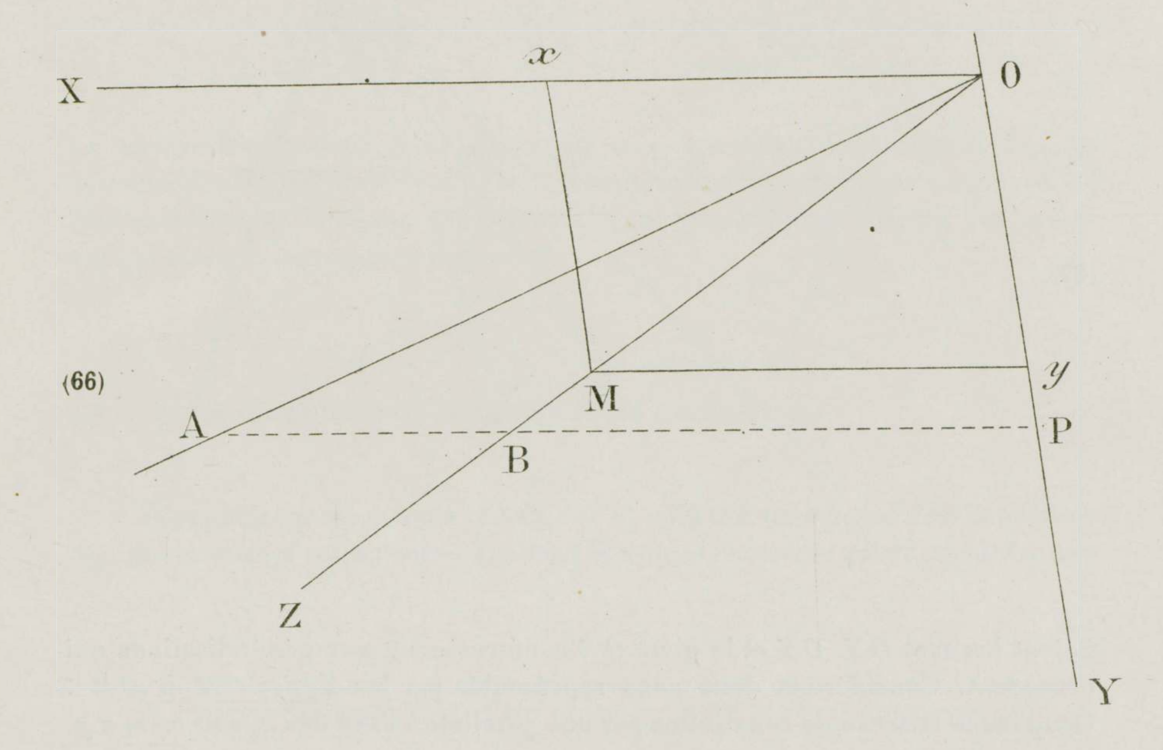
angulaires des droites issues de l'origine, coëfficient exprimé numériquement conformément à la convention sur les échelles.

Soit B le point où la ligne AP coupe la droite OZ. Le point B a une abscisse égale à son ordonnée. La longueur BP est donc numériquement égale à l'ordonnée OP, mais cette longueur BP étant posée sur l'abscisse est exprimée selon la même échelle que AP. L'intervalle du son OA avec l'origine OZ est représenté par le rapport des longueurs réelles

$$\frac{AP}{BP}$$

En définitive, quand on connaît les axes obliques OX, OY ainsi que le pivot OZ, en traçant à partir d'un point M quelconque de OZ les coor-

données Mx et My, on pourra prendre Ox ou My comme unité d'abscisses et Oy ou Mx comme unité d'ordonnées. Si on donne un son quelconque OA,



l'intervalle qu'il forme avec le pivot OZ sera représenté par le rapport donné ci-dessus

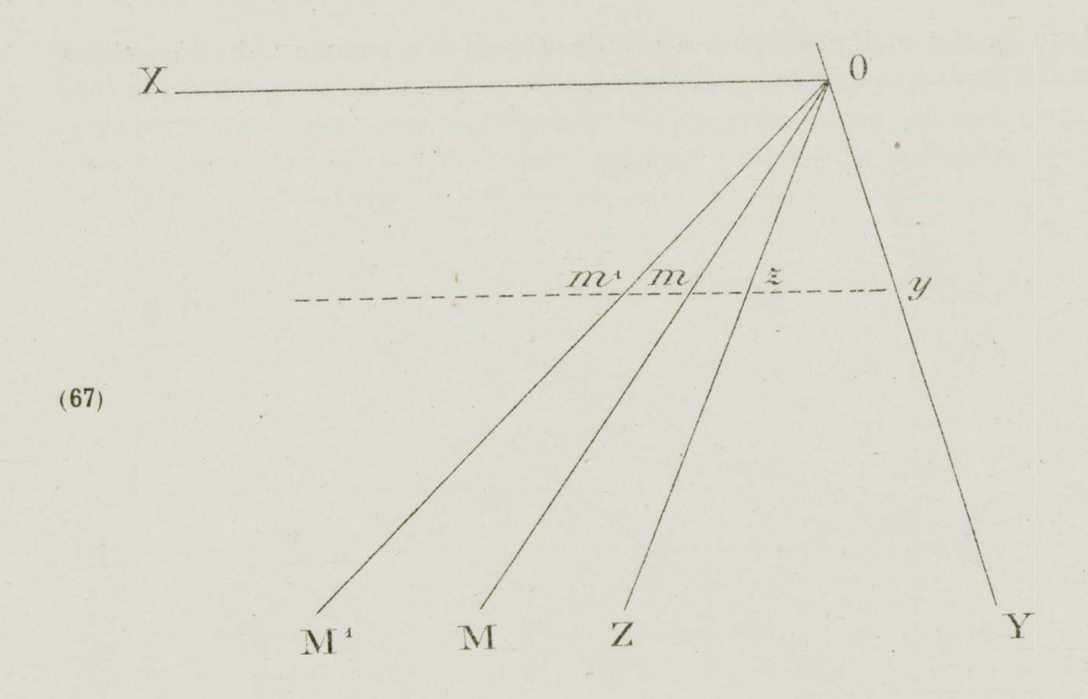
$$\frac{AP}{BP}$$

C'est ainsi que la connaissance des axes OX, OY et du pivot OZ, commande entièrement la formation de l'abaque ainsi généralisée.

§ 2. — **Du changement de pivot.**

Un son étant représenté par une droite issue de l'origine O, nous allons faire voir qu'on peut choisir comme pivot un quelconque de ces sons.

(67)



Soient les axes OX, OY et le pivot OZ conformément aux généralisations qui précèdent. Considérons deux sons représentés par les lignes OM et OM^1. Coupons le faisceau de ces droites par une parallèle à l'axe des x, soit $m^1\ m\ z\ y$.

La ligne OZ étant le pivot, chacun des intervalles formés par les sons OM et OM^1 avec OZ est donné par les rapports

(68) $$\left(\frac{m\ y}{z\ y}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{m^1\ y}{z\ y}\right)$$

Proposons-nous de changer de pivot et d'adopter pour ce nouveau pivot le son OM au lieu du son OZ. Nous vérifions qu'il suffit pour cela de suivre nos conventions :

Si OM devient le pivot, l'intervalle entre les sons OM^1 et OM doit être

$$\left(\frac{m^1\ y}{m\ y}\right)$$

Mais cet intervalle doit être aussi la différence des expressions (**68**), c'est-à-dire

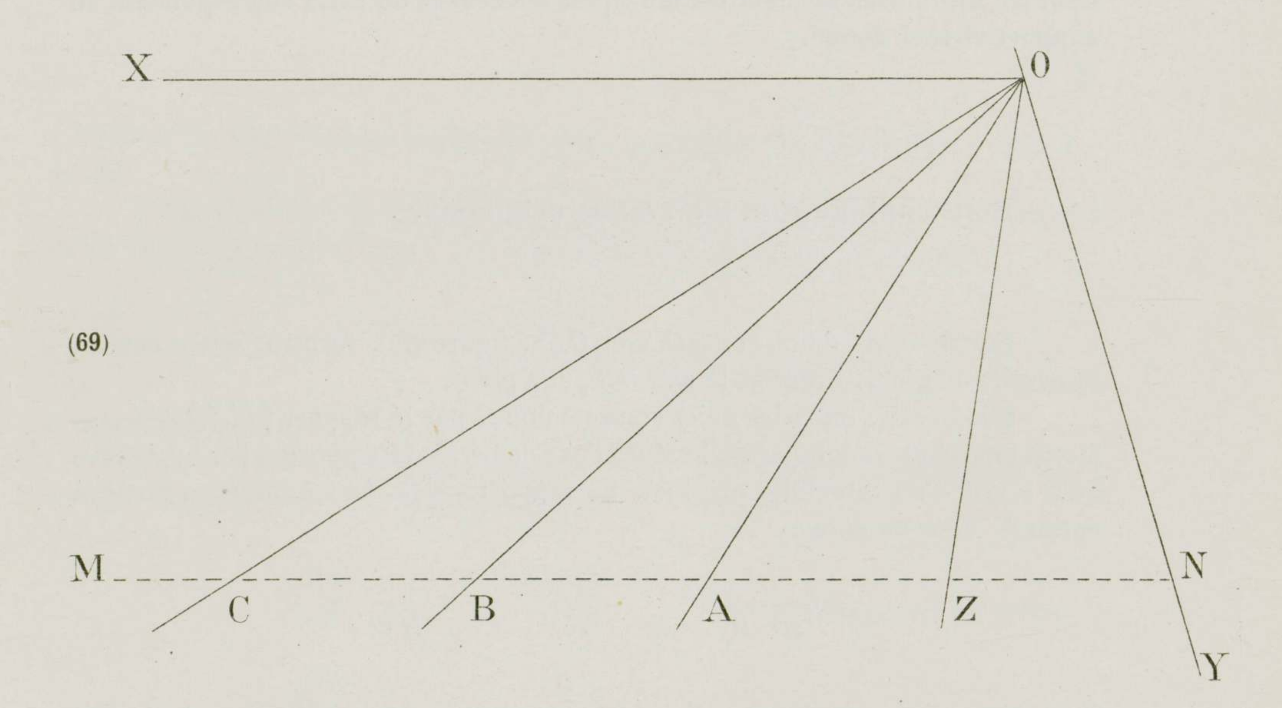
$$\left(\frac{m^1 y}{z\ y}\right) - \left(\frac{m\ y}{z\ y}\right) = \left(\frac{m^1 y}{m\ y}\right)$$

La vérification est donc complète. Ainsi, moyennant les conventions faites, un système d'axes *O X* et *O Y* peut servir à représenter tous les sons au moyen de droites issues de l'origine. On peut d'ailleurs prendre pour origine des intervalles un son quelconque tel que *O Z*.

§ 3. — **Sons ayant mêmes supports réels ou virtuels.**

Considérons deux axes *O X* et *O Y* et soit *O Z* un son qui soit le support réel d'une série d'autres sons. Prenons le son *O Z* comme pivot, menons une

(**69**)



ligne $M N$ parallèle à $O X$, et prenons sur cette ligne une série de points A, B, C, etc., tels que l'on ait

$$\overline{AN} = 2\ \overline{ZN} \qquad \overline{BN} = 3\ \overline{ZN} \qquad \overline{CN} = 4\ \overline{ZN} \quad \text{etc.}$$

Choisissons $Z N$ comme unité des abscisses et joignons OA, OB, OC. Ces droites forment autant de sons qui sont à des intervalles de $O Z$ marqués par les rapports

$$\left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \text{ etc.}$$

Ces droites OA, OB, OC, etc., représentent donc les sons harmoniques de OZ. Ce dernier son forme donc leur support réel commun.

On verrait de la même manière que les divers sons qui ont un même support virtuel donné coupent une parallèle à $O Y$ suivant une série de points dont les ordonnées seraient les multiples successifs de celle correspondant au support virtuel donné.

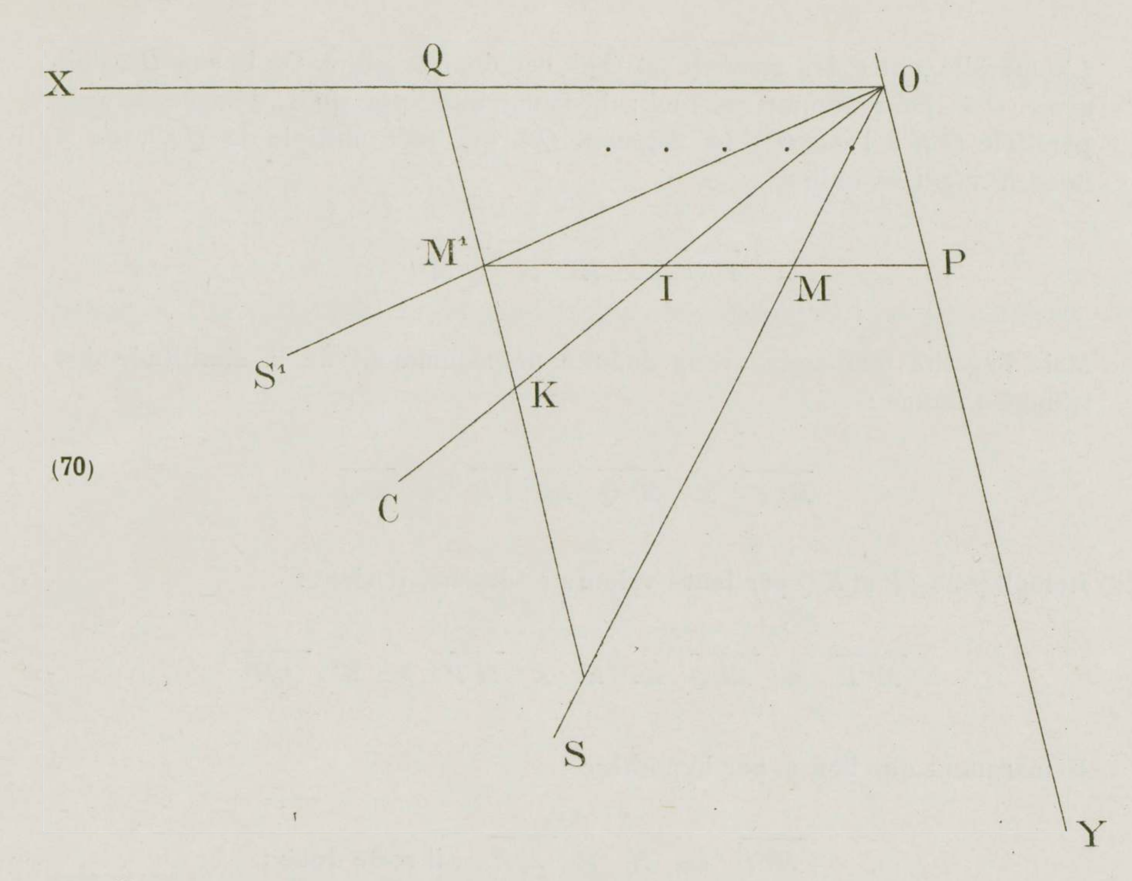
§ 4. — Sons conjugués et intervalles originaux.

Considérons deux sons $O S$ et $O S^1$, figure (**70**), formant entre eux un intervalle original. Prenons le son OS pour pivot.

L'intervalle entre les deux sons est donné par le rapport $\left(\frac{M_1 P}{M P}\right)$ des segments interceptés sur la parallèle $M^1 P$ à l'axe des x. Nous supposons par hypothèse qu'il s'agit d'un intervalle original. Le rapport $\frac{M_1 P}{M P}$ forme donc un nombre entier N, donc on aura :

$$\overline{M^1 P} = N \times \overline{M P}$$

Considérons un son intermédiaire $O C$ et voyons les conditions qu'il doit



remplir pour être compris parmi les sons conjugués de l'intervalle original donné.

Prenons $\overline{MP}$ pour unité et OS pour pivot ; le son OC fait avec OS un intervalle $\left(\frac{IP}{MP}\right)$, il doit avoir pour support réel OS, il faut que l'on ait

$$\overline{IP} = K \times \overline{MP}$$

K étant un nombre entier.

D'autre part, l'intervalle de OS^1 et de OC est $\left(\frac{M_1 P}{IP}\right)$. Considérons les triangles semblables KOQ et IOP, on trouve

$$\frac{QO}{IP} = \frac{KQ}{PO}$$ ou, ce qui revient au même

$$\frac{M^1 P}{IP} = \frac{KQ}{M^1 Q}$$

L'intervalle entre les sons OC et OS^1 est donc $\left(\frac{KQ}{M^1Q}\right)$. Or le son OC doit avoir OS^1 pour support virtuel ; il faut pour cela qu'il détache sur la parallèle QK à l'axe OY un segment QK qui soit multiple de QM^1, on a donc K^1 étant un entier :

$$\overline{KQ} = K^1 \times \overline{QM^1}$$

Mais l'égalité que nous avons déduite précédemment de la similitude des triangles donne :

$$\overline{M^1P} \times \overline{M^1Q} = \overline{IP} \times \overline{KQ}$$

Remplaçons IP et KQ par leurs valeurs ci-dessus, il vient :

$$\overline{M^1P} \times \overline{M^1Q} = K \times \overline{MP} \times K^1 \; \overline{QM^1}.$$

Remarquons que l'on a, par hypothèse

$$\overline{M^1P} = N \times \overline{MP}\text{ , il reste donc :}$$

$$N = K \times K^1$$

C'est bien la condition obtenue au § 14, chap. I.

§ 5. — **Représentation des trois sons de la théorie.**

On sait que les trois sons de la théorie ont leurs vibrations proportionnelles à trois nombres consécutifs, ou bien à l'inverse de trois nombres consécutifs. Dans le premier cas, les trois sons ont même support réel, dans le second cas, ils ont le même support virtuel.

Examinons le cas du support réel commun, et soient :

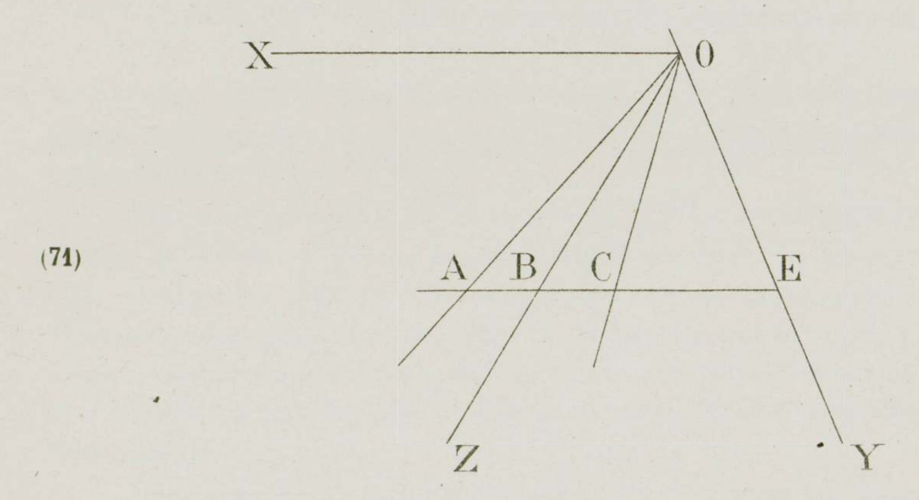
$$U - 1 \qquad\qquad U \qquad\qquad U + 1$$

les trois nombres consécutifs qui caractérisent les trois sons. Prenons le son intermédiaire pour origine, les intervalles sont :

$$\left(\frac{U-1}{U}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{U+1}{U}\right)$$

Soient OX, OY, OZ trois droites qui figurent les axes et le son intermédiaire

(71)



pris pour origine, figure (71). Soient AO et OB les deux autres sons. On aura :

$$\frac{AE}{BE} = \frac{U+1}{U} \quad \text{et} \quad \frac{CE}{BE} = \frac{U-1}{U}$$

BE étant supposé divisé en U parties égales, BC et BA seront égaux à une de ces parties, et on aura

$$BA = BC$$

Si on considère les quatre droites OX, OA, OB, OC, on voit que la parallèle à l'une d'elles, OX, est divisée par les trois autres en deux parties égales. Ces quatre droites forment donc un faisceau harmonique.

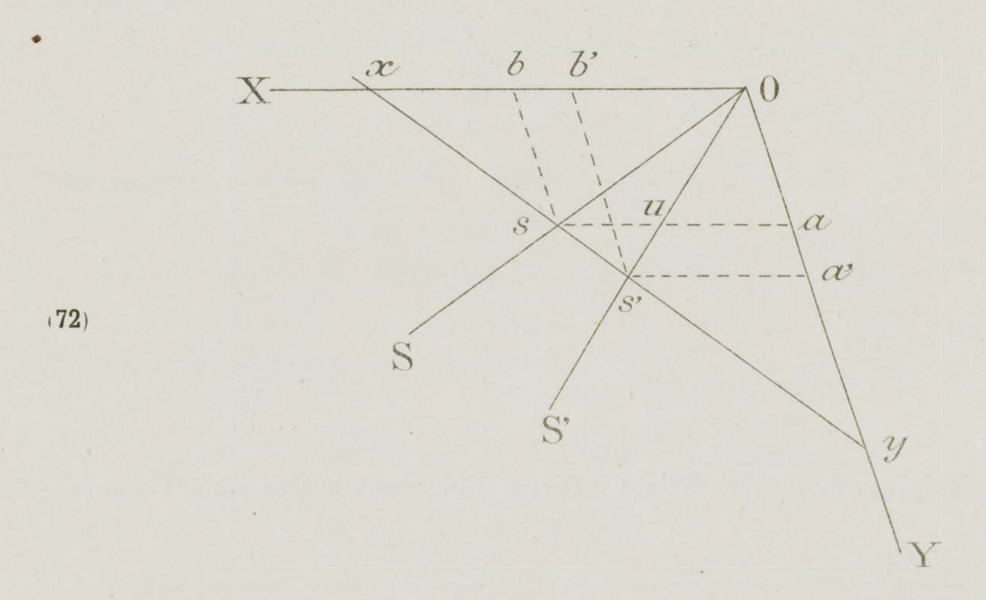
Ainsi, les trois sons de la théorie, lorsqu'ils ont même support réel, forment un faisceau harmonique avec l'axe OX. On verrait de la même manière que ces trois sons, lorsqu'ils correspondent à un même support virtuel, forment un faisceau harmonique avec l'axe OY.

§ 6. — **Nouvelle généralisation de l'abaque.**

Soient les axes OX et OY et deux droites OS et OS^1 représentant deux sons quelconques. Je vais démontrer que le rapport anharmonique des quatre droites OX, OY, OS et OS^1 représente l'intervalle des sons OS et OS^1.

Menons une transversale quelconque coupant le faisceau en x, y, S et S^1

(72)



et considérons successivement les deux rapports $\frac{s\,y}{s^1\,y}$ d'une part, et $\frac{s\,x}{s^1\,x}$ d'autre part. Menons par s et s^1 les parallèles $s\,a$ et $s^1\,a^1$ à l'axe OX, ainsi que $s\,b$ et $s^1\,b$ à l'axe OY. On aura :

$$\frac{s\,y}{s^1\,y} = \frac{s\,a}{s^1\,a} \quad \text{et} \quad \frac{s\,x}{s^1\,x} = \frac{s\,b}{s^1\,b}$$

Faisons le quotient de ces deux égalités, nous trouvons :

$$\frac{s\,y}{s^1\,y} : \frac{s\,x}{s^1\,x} = \frac{s\,a}{s^1\,a} \times \frac{s^1\,b}{s\,b} = \frac{s\,a}{s\,b} \times \frac{s^1\,b}{s^1\,a}$$

Appelons σ et σ^1 les coefficients angulaires des droites OS et OS^1, on aura :

$$\sigma = \frac{s\,a}{s\,b} \qquad \sigma^1 = \frac{s^1\,a}{s^1\,b}$$

L'égalité précédente deviendra alors :

$$\frac{s\,y}{s^1\,y} : \frac{s\,x}{s^1\,x} = \frac{\sigma}{\sigma^1}$$

Le premier membre de cette égalité représente le rapport anharmonique des quatre droites OX, OY, OS et OS^1. C'est une quantité constante qui a pour valeur le rapport $\frac{\sigma}{\sigma^1}$.

Soit u le point où la droite $s\,a$ coupe OS^1 les coefficients σ et σ^1 peuvent s'écrire $\frac{s\,a}{a\,o} = \sigma$ et $\frac{u\,a}{a\,o} = \sigma^1$, par suite le quotient $\frac{\sigma}{\sigma^1}$ peut s'écrire $\frac{s\,a}{a\,o}$: $\frac{u\,a}{a\,o}$, c'est-à-dire $\frac{s\,a}{u\,a}$. Sous cette forme on voit que le rapport $\frac{\sigma}{\sigma^1}$ représente l'intervalle des deux sons OS et OS^1, intervalle qui est égal, par suite, au rapport anharmonique des quatre droites, comme nous l'avons annoncé. C'est une nouvelle généralisation de l'abaque, pour définir l'intervalle entre deux sons donnés.

Nous n'en dirons pas davantage sur ce sujet. Nous voulions simplement montrer les liens étroits qui unissent la géométrie à la musique. Nous avons pensé qu'il était curieux et utile de signaler ces liens, chacun pouvant donner à ce sujet, s'il le désire, tout le développement qu'il comporte.

On avait vu, par les considérations développées antérieurement, les rapports qu'il y a entre la musique et la théorie des nombres. Nous avons signalé également comment la notion des intervalles entraînait nécessairement celle des logarithmes. Enfin si on ajoute à ce qui précède les remarques que l'on pourrait faire au sujet des attractions, on peut dire que la musique touche au domaine de toutes les sciences.

CHAPITRE VI

Périodicité

§ 1. — **Premiers groupements des trois sons** (*P*).

Nous allons étudier, parmi les groupements de trois sons signalés au chapitre III, § 7, ceux qui n'utilisent que les deux premières empreintes, ou les deux premières fenêtres. Les intervalles parcourus ne comportent que les nombres un et deux. Ce sont les groupements (**45**) *P* et (**48**) *P*, savoir :

$$\text{Intervalles : } \quad \overleftarrow{\left(\frac{0}{1}\right) \quad \left(\frac{1}{1}\right)} \overrightarrow{\quad \left(\frac{2}{1}\right)} \qquad \text{Nombres : } \quad 0 \quad 1 \quad 2$$

$$\overrightarrow{\left(\frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{1}{1}\right)} \overleftarrow{\quad \left(\frac{1}{0}\right)} \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0}$$

Le premier correspond à un dédoublement direct première manière et le second à une concentration directe seconde manière.

Ce qu'il y a de particulièrement remarquable, dans ces groupements, c'est qu'en fait les trois sons se réduisent à deux ; le troisième se trouvant rejeté à l'infini, n'existe pas en réalité. Les deux combinaisons se réduisent à un simple intervalle, $\left(\frac{2}{1}\right)$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)$, que nous avons appelé octave.

§ 2. — Intervalle d'équilibre complet. — Quasi-identité des sons.

Considérons un son faisant avec son pivot l'intervalle $\left(\frac{2}{1}\right)$; ce son ne subira aucune attraction directe, car toutes les fenêtres sont couvertes par les empreintes paires du son. Il ne subira pas davantage des attractions indirectes, car les empreintes paires du son portent toutes sur des fenêtres, tandis que les empreintes impaires sont en équilibre sur les points neutres du pivot ; cet équilibre quoiqu'instable doit en effet être retenu. Ainsi le son considéré est à l'état d'équilibre complet, direct ou indirect, sur le pivot.

Des considérations analogues s'appliquent à l'intervalle $\left(\frac{1}{2}\right)$.

Il résulte de ces explications que l'intervalle d'octave est un intervalle d'équilibre complet. Il est d'ailleurs le seul, car tout autre intervalle comporte nécessairement, soit des fenêtres, soit des empreintes non couvertes par des empreintes, des fenêtres ou des points neutres.

Lorsqu'après avoir exprimé un son, on en exprime un autre à une octave au-dessus, celui-ci reproduit toutes les empreintes du premier par ses empreintes paires ; quant aux empreintes impaires elles tombent sur les points neutres du premier, c'est-à-dire sur les points les plus obscurs, elles sont donc en partie éteintes. Le second son reproduit en quelque sorte le premier à cause de l'impression quasi-commune qu'il donne ; il y a quasi-identité.

Cette quasi-identité n'existe avec aucun autre intervalle, parce qu'un certain nombre des empreintes du son le plus élevé tombe nécessairement en dehors des empreintes ou des points neutres du son le plus grave.

§ 3. — De l'intuition.

Considérons un premier son et prenons-le pour pivot ; exprimons ensuite d'autres sons formant avec le premier divers intervalles. Les sons considérés signalent sur le pivot les fenêtres correspondant à ces intervalles. Il est remarquable que jamais ces fenêtres ne sont signalées isolément, plusieurs d'entre elles sont toujours simultanément indiquées, ce sont celles des sons implicites qui forment les divers supports réels, supports dont les empreintes sont les seules qui conservent toute leur limpidité. Il résulte de ces faits que nos sens ne prennent pas à proprement parler la notion d'une empreinte isolée d'un son, mais celle d'un système d'empreintes formant les divers sons

implicites. Par habitude intuitive, lorsqu'un son est émis, nos sens considèrent que ce son est composé, en ce qui regarde les impressions qu'il fait sur notre oreille, du son lui-même et de tout un cortège de sons implicites.

Parmi ces sons implicites dont nous avons la notion, par intuition, et en quelque sorte sans nous en douter, il en est un qui se signale plus particulièrement que les autres, en raison de la plus grande communauté d'impression qu'il possède avec le son donné, c'est celui qui est à une octave au-dessous.

§ 4. — Les intervalles normaux, redoublés ou renversés donnent lieu aux mêmes attractions.

Un intervalle normal est plus petit qu'une octave.

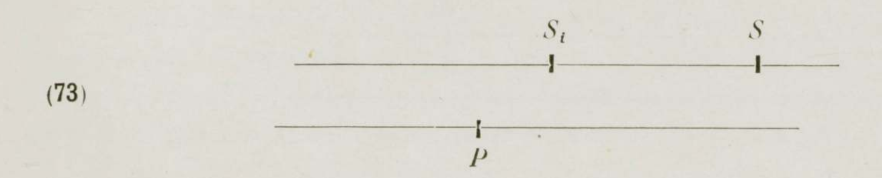
Un intervalle redoublé est composé d'une octave plus l'intervalle normal.

Un intervalle renversé est égal à une octave, diminué de l'intervalle normal.

Les intervalles normaux, redoublés ou renversés développent intuitivement les mêmes attractions.

Considérons déjà les intervalles redoublés. Soit un son S et son pivot P, figure (**73**), formant entre eux un intervalle redoublé $P\,S$.

(**73**)

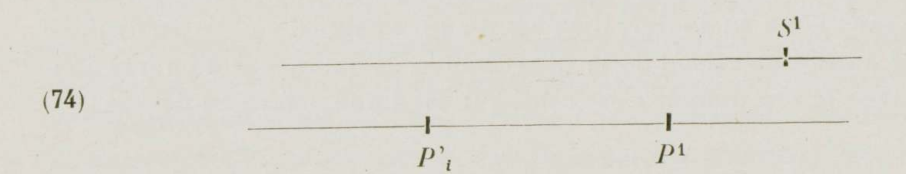


Considérons le son implicite S_i, situé à une octave au-dessous de S. Ce son S_i forme avec P l'intervalle normal $P\,S_i$ qui correspond à l'intervalle redoublé $P\ S$. Le son S_i est intuitivement détaché de S et parfaitement perçu. De plus, ce son S_i mis en présence du pivot P donne lieu intuitivement aux attractions de l'intervalle normal $P\,S_i$; le son S_i peut donc se mouvoir en conformité de ces attractions, entraînant avec lui le son S, dont il fait partie intégrante. Le son S peut donc se mouvoir en conformité des attractions qui résultent de l'intervalle normal.

Réciproquement, considérons un intervalle normal $P^1\ S^1$, figure (**74**), et envisageons le son implicite P'_i à une octave au-dessous du pivot. Le

son S^1 se trouve en présence du son P'_i et en subit intuitivement les attractions. Le son S^1 peut ainsi se mouvoir en conformité des attractions qui résultent intuitivement de l'intervalle redoublé $P'_i\ S^1$.

(74)

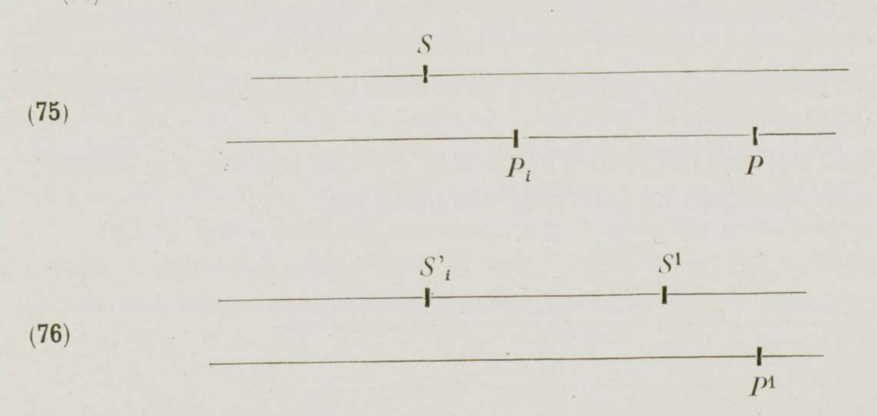


Un intervalle redoublé peut donc donner lieu intuitivement aux attractions de l'intervalle normal, et réciproquement ; par conséquent l'intervalle normal possède les mêmes attractions, intuitivement, que l'intervalle redoublé.

Notre démonstration a été faite en admettant des intervalles positifs. Elle se ferait de même avec des intervalles négatifs, au moyen des figures (**75**) et (**76**).

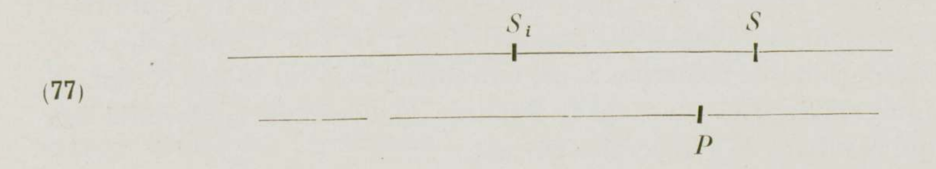
(75)

(76)



Considérons de la même manière les intervalles renversés. Soit un intervalle normal positif $P\ S$, figure (**77**). Le son implicite S_i, à une octave au-dessous de S, forme avec P l'intervalle renversé $P\ S_i$.

(77)



Le mouvement du son S peut être commandé par les attractions exercées

par le pivot sur le son intuitif S_i ; donc le son S, qui suit parallèlement le mouvement de S_i puisque celui-ci en est une partie, peut se mouvoir en vertu des attractions de l'intervalle renversé $P\ S_i$.

Réciproquement, soit $P^1\ S^1$ un intervalle qui serait le renversement de $P\ S$, figure (**78**) ; considérons le son implicite P'_i à une octave au-dessous

(**78**)



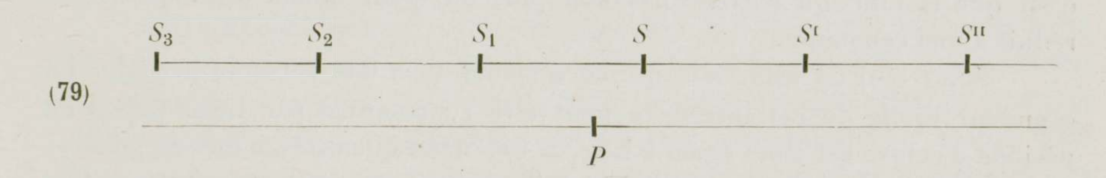
de P^1. Ce son intuitif P'_i, mis en présence du son S^1, développe les attractions dues à l'intervalle $P'_i\ S^1$, renversement de $P^1\ S^1$. Le son S^1 subit donc les attractions d'un intervalle $P\ S$, puisque l'intervalle $P'_i\ S^1$ est égal à $P\ S$.

Donc tout intervalle normal possède intuitivement les attractions de son renversement et réciproquement ; par conséquent toutes leurs attractions sont intuitivement communes (1).

§ 5. — **Périodicité.**

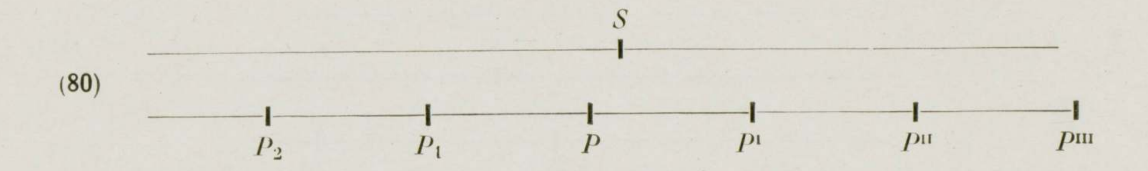
Considérons un pivot P et un son S, il résulte de ce qui précède que tous les sons $S^{I}\ S^{II}\ S^{III}$ ou $S_1\ S_2\ S_3$, placés à des octaves du son S, subissent de la part du pivot les mêmes attractions (intuitivement bien entendu). Tous ces sons ont donc tendance à se mouvoir parallèlement, figure (**79**).

(**79**)



(1) On peut vérifier que, avec les intervalles consonnants, ainsi qu'on le verra par la suite et qui sont $\left(\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{6}{5}\right)$ les attractions réelles les plus caractéristiques sont les mêmes que pour leur renversement : $\left(\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{3}{5}\right)$, sans qu'il soit besoin de faire intervenir la notion intuitive sur laquelle nous avons basé notre démonstration pour lui donner un caractère général. En réalité la périodicité aurait pu s'établir sans l'intuition, mais avec une généralité diminuée.

On peut dire de la même manière, en considérant une série de pivots P^{I} P^{II} P^{III} ou P_1 P_2 P_3, placés à des octaves de P, que ces divers sons pris comme pivots exercent les mêmes attractions (intuitivement bien entendu) que le pivot P, figure (**80**).



L'ensemble de ces faits constitue ce qui caractérise la périodicité, savoir, qu'après le parcours d'une octave, le son subit les mêmes influences, ou provoque les mêmes attractions.

§ 6. — **Incompatibilité**.

Les attractions d'un son dépendent de l'intervalle qu'il forme avec le pivot. On vient de voir que ces attractions se reproduisent périodiquement à chaque période d'octave. Nous devons faire remarquer qu'il ne peut exister aucune autre période que l'octave.

On sait en effet que, si deux périodes existaient simultanément, ces deux périodes devraient en fait se réduire à une seule qui serait commune mesure des deux périodes données. Si cette commune mesure n'existe pas, c'est que la fonction n'existe pas non plus ou, pour mieux dire, qu'elle se réduit à une constante.

Soit $\left(\frac{p}{q}\right)$ un intervalle qui correspondrait à une seconde période. La grandeur réelle de cet intervalle peut être représentée par Log. $\left(\frac{p}{q}\right)$. La période d'octave est alors égale à Log. 2. Ces deux quantités n'ont en général aucune commune mesure, à moins que $\frac{p}{q}$ ne soit une puissance de 2 positive ou négative. Il y a donc impossibilité en général d'avoir une seconde période, et quand cela devient possible, cette seconde période est un multiple d'octave et n'est pas distincte de la première.

La période d'octave s'impose avant tout, si donc il arrive que, par les combinaisons adoptées, on donne prise à la supposition d'une autre période, on tend à réaliser une chose impossible que nos sens ne manquent pas de nous

révéler. C'est en cela que consiste ce que nous appelons l'incompatibilité, fait qui joue un grand rôle dans la musique et qui engendrera l'anharmonie, comme nous l'exposerons dans la suite.

§ 7. — Comparaison avec le mouvement circulaire. — Identification des sons périodiques.

Considérons une circonférence dont la longueur serait égale à une octave. Imaginons qu'un point, mobile sur cette circonférence, représente un son. A chaque tour, le son reprend la même position, il y a quasi-identité C'est l'équivalent de ce qui se passe pour la mesure des angles. Un intervalle normal correspond à un angle plus petit qu'une circonférence. Après un parcours de plusieurs octaves, le son reste quasi-identique, comme l'angle qui dépasse une circonférence reprend en quelque sorte sa valeur primitive, à des circonférences près.

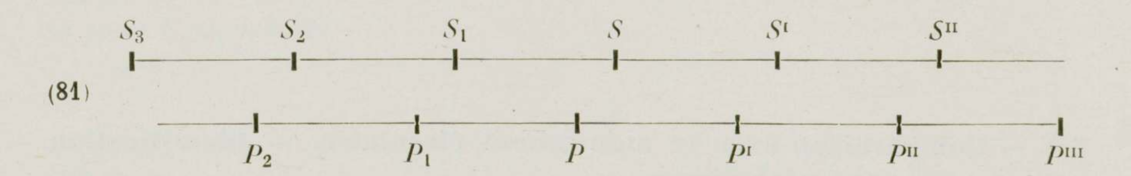
Les sons périodiques portent le même nom, comme pour indiquer en quelque sorte l'identité de position qui résulte du déplacement d'une circonférence entière.

§ 8. — Etat particulier et état général d'un son. — Etat particulier et état général d'un intervalle.

Considérons un son S. Tous les sons tels que S^{I} S^{II} S^{III}, etc. ou S_1 S_2 S_3, etc., espacés entre eux d'octave en octave, portent le même nom, conformément à ce qui vient d'être dit. Toute cette série de sons ne sont donc, en quelque sorte, chacun pris en particulier, qu'un état particulier d'un même son. L'ensemble de tous ces sons constitue au contraire ce qu'on peut appeler l'état général d'un son.

Si on considère l'état général d'un pivot P, formé des pivots P^{I} P^{II} P^{III}, etc. et P_1 P_2 P_3, etc., on peut associer les deux états généraux du son et du pivot, figure (**81**), nous aurons alors ce qu'on peut appeler l'état général d'un intervalle, par opposition à l'état particulier d'un intervalle, lequel serait l'intervalle réel entre un son quelconque de la série S, et un son quelconque

de la série P. C'est ainsi que les intervalles normaux, redoublés ou renversés ne seraient que des états particuliers d'un même intervalle général.

(81) 

§ 9. — **Intervalles originaux**.

Les intervalles originaux ont été définis au chapitre I, § 9 ; ils ont la forme $\left(\frac{p}{1}\right)$ ou $\left(\frac{1}{p}\right)$. Ce qui caractérise ces intervalles c'est que les deux sons qui les composent forment les supports réels et virtuels de l'intervalle. En raison de la généralisation des intervalles telle qu'elle résulte de la périodicité, il nous suffira, pour caractériser un intervalle original, de le réduire à l'intervalle normal correspondant. Le nombre p sera contenu entre deux puissances de deux consécutives :

$$2^n < p < 2^{n+1}$$

Les intervalles normaux à considérer seront donc :

soit $\left(\frac{p}{2^n}\right)$ intervalle positif

soit $\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right)$ intervalle négatif

Chacun de ces intervalles est le renversement de l'autre.

On aurait pu prendre l'intervalle retourné $\left(\frac{1}{p}\right)$ et le transformer ainsi :

soit $\left(\frac{2^n}{p}\right)$ intervalle négatif

soit $\left(\frac{2^{n+1}}{p}\right)$ intervalle positif

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer que la musique, telle qu'elle peut résulter des combinaisons obtenues directement de la théorie des trois sons, ne comprend que des intervalles primaires. Les intervalles originaux utilisables doivent résulter de nombres p ayant la forme $2^n \pm 1$. Cela donne pour les valeurs admissibles de p, directement utilisables, 3, 5, 7 et 9. Les intervalles originaux qui proviendraient des nombres premiers absolus 11 et 13, ne peuvent pas être révélés. Nos sens ont dû négliger les impressions qui en résultent ainsi que celles qui correspondent à tous les autres nombres premiers supérieurs ; ces faits seront confirmés quand nous traiterons de la dissonnance.

Quant aux intervalles originaux supérieurs, formés de nombres dans lesquels il n'entre que des facteurs premiers 3, 5 ou 7, s'ils ne sont pas révélés directement, ils peuvent tout au moins naître de différences, comme, par exemple :

$$\left(\frac{16}{15}\right) = \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{4}\right)$$

§ 10. — **Répliques et repos.**

Considérons un pivot P faisant avec un son S un intervalle original qui, ramené à l'intervalle normal, ait pour valeur $\left(\frac{p}{2^n}\right)$. Le support réel est formé par le son implicite du pivot d'ordre 2^n. On en conclut que l'expression du son S, venant après celle du pivot, contribue à répéter ce pivot par le moyen du support réel, et on dit que le son S est une réplique du pivot. Quant au son S lui-même, c'est un son harmonique du support réel, c'est-à-dire un son harmonique du pivot à des octaves près. La réplique d'un son se confond donc à des octaves près avec un son harmonique ; c'est un son qui n'est pas contenu dans l'expression du pivot, c'est un son nouveau ; il reproduit bien le son du pivot, mais par un de ses sons implicites, celui dont l'ordre est p.

Considérons un pivot P^1 faisant avec un son S^1 un intervalle original, qui, ramené à l'intervalle normal, ait pour valeur $\left(\frac{2^n}{q}\right)$. Le support réel est formé par le son implicite d'ordre 2^n du son S^1. On conclut que ce support réel porte le même nom que le son S^1. D'un autre côté ce support réel forme un son implicite d'ordre q du pivot. Le son S^1 est donc à des octaves près un son implicite du pivot ; ce son S^1 est contenu implicitement dans l'expression du

pivot P^1, ce n'est donc pas un son nouveau. Le son S^1 ainsi obtenu forme ce que nous appellerons un repos du pivot P^1.

On a vu que les intervalles originaux qu'il est permis de former directement en vertu de la théorie des trois sons résultent des seuls nombres

$$3 \quad , \quad 5 \quad , \quad 7 \quad , \quad 9$$

Les intervalles originaux correspondants, ramenés à l'intervalle normal primaire correspondant, sont donc les suivants :

Répliques du pivot : $\left(\frac{3}{2}\right)$ ou $\left(\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{8}\right)$, $\left(\frac{9}{8}\right)$

Repos du pivot : $\left(\frac{2}{3}\right)$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{7}\right)$, $\left(\frac{8}{9}\right)$

Nous désignerons les diverses répliques d'un son pris pour pivot par les lettres : R_3, R_5, R_7 et R_9, en portant en indice le nombre caractéristique de l'intervalle. Nous désignerons de même les repos par : r_3, r_5, r_7, r_9. Nous donnons, avec la figure (**82**), le schéma représentatif des répliques et des repos d'un son ***P*** et ***P***^{1}

	R_3	R_7	***P***	R_9	R_5	R_3
Répliques :	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$

(**82**)

	r_3	r_5	r_9	***P***^{1}	r_7	r_3
Repos :	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{8}{7}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$

Il résulte des explications données ci-dessus que l'expression de deux sons qui forment entre eux un intervalle original, n'amène directement la

notion d'aucun autre son, parce que le support réel aussi bien que le support virtuel ne sont pas autre chose, à des octaves près, que les sons de l'intervalle.

Sous la forme $\left(\frac{p}{2^n}\right)$, c'est le pivot qui se réfère au support réel et le son au support virtuel.

Sous la forme $\left(\frac{2^n}{q}\right)$, c'est au contraire le pivot qui se réfère au support virtuel et le son au support réel.

§ 11. — **De la notion de direction. — Incohérence.**

Tous les intervalles originaux que nous venons de définir résultent de la théorie des trois sons. Reportons-nous au chapitre III qui s'applique exclusivement aux attractions directes; nous voyons que les intervalles originaux sont parcourus ainsi :

(45) C	$\left(\frac{2}{3}\right)$	et	$\left(\frac{4}{3}\right)$	Le premier descend. Le second monte
(45) A P M	$\left(\frac{4}{5}\right)$			Descend
(45) A I p = 3	$\left(\frac{8}{7}\right)$			Monte
(45) A I P = 4	$\left(\frac{8}{9}\right)$			Descend
(46) C	$\left(\frac{2}{3}\right)$			Descend
(46) A P m	$\left(\frac{4}{5}\right)$	et	$\left(\frac{4}{3}\right)$	Le premier descend. Le second monte
(46) A I p = 4	$\left(\frac{8}{9}\right)$	et	$\left(\frac{8}{7}\right)$	Le premier descend. Le second monte

et ainsi de suite.

Les parcours ainsi considérés résultent des attractions directes, aussi les désignons-nous sous le nom de parcours direct, correspondant au sens direct de l'intervalle. Le sens direct d'un intervalle original primaire est donc marqué par l'expression même de cet intervalle, en ayant soin de mettre la puissance de 2 au numérateur :

$\left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{5}\right), \left(\frac{8}{7}\right), \left(\frac{8}{9}\right)$. Le son va de la réplique au repos.

Si, au lieu de se reporter au tableau des attractions directes, on considère le tableau des attractions indirectes à la fin du chapitre IV, on trouvera que le parcours indirect des intervalles originaux primaires s'effectue en sens inverse du parcours direct. On obtient donc le sens indirect en plaçant la puissance de 2 au dénominateur :

$\left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}\right), \left(\frac{7}{8}\right), \left(\frac{9}{8}\right)$. Le son va du repos à la réplique.

Lorsqu'on considère le mouvement du son, soit dans le parcours direct, soit dans le parcours indirect, on constate, en vertu de ce qui précède, que le sens indirect correspond à la direction qui va du pivot à sa réplique, et que le sens direct correspond à celle qui va du pivot à son repos.

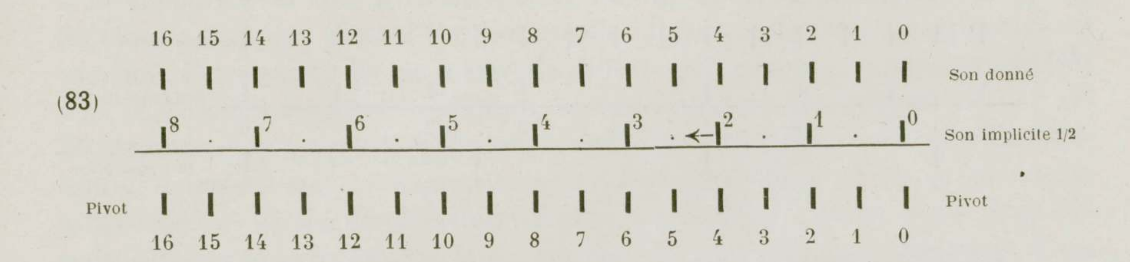
Dans le parcours indirect, le son va du support réel au support virtuel, c'est-à-dire du connu à l'inconnu. Dans le parcours direct, il va du support virtuel au support réel, c'est-à-dire qu'il part d'un son donné pour aboutir à un autre implicitement contenu dans le son donné, et sur lequel il se plait à s'arrêter.

Les parcours directs et indirects résultent de notions différentes. On ne peut pas concevoir des mouvements simultanés s'effectuant l'un par le procédé des attractions directes, l'autre par celui des attractions indirectes. Tout mouvement simultané qui contribue à donner cette impression contradictoire donnera lieu à ce que nous appellerons une incohérence. L'incohérence constitue un désordre dans la direction des sons. Les principales règles de l'harmonie tendent à éviter les effets fâcheux qui résultent de ce désordre.

§ 12. – **Interprétation intuitive des mouvements directs et indirects.**

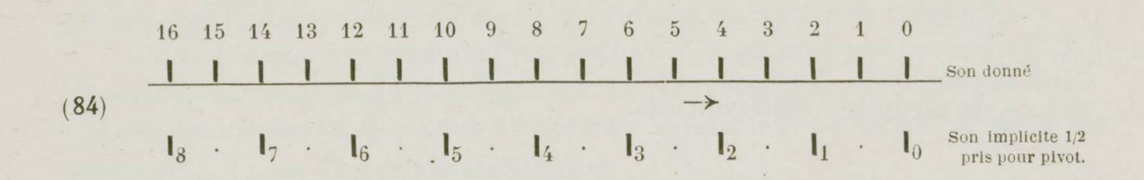
Supposons que l'on émette un son quelconque, dont nous figurons les empreintes au schéma (83). Nous détachons intuitivement le son placé à une

octave au-dessous du son donné. Prenons alors le son primitif pour pivot. Il naît, entre le pivot et le son intuitivement détaché toutes les attractions intuitives de la théorie des trois sons, telles qu'elles résultent du schéma (33), au chapitre III, § 2. Ces attractions sont directes.



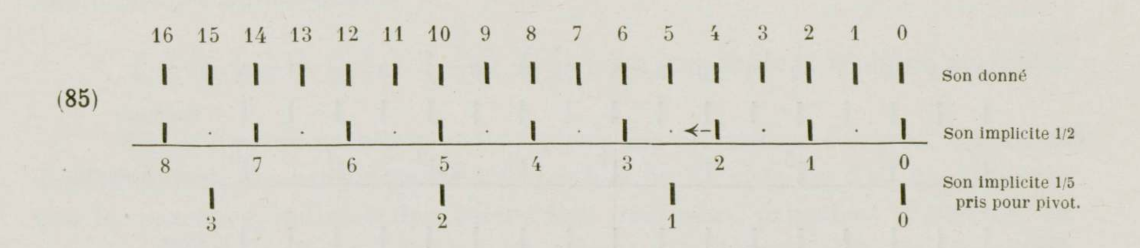
Le son implicite entraîné par l'attraction intuitive du pivot conduit avec lui le son donné figuré sur la première ligne. Si on considère par exemple la fenêtre 5, nous constatons que l'intervalle original $\left(\frac{4}{5}\right)$ est parcouru en descendant, dans le sens direct. Si au lieu de considérer la fenêtre 5, nous avions envisagé la fenêtre 11, nous verrions que les attractions intuitives ne donnent pas naissance à l'intervalle original qui est caractérisé par ce nombre premier. C'est que l'empreinte 11 est séparée des empreintes 8 et 16, qui sont puissances de 2, par d'autres empreintes qui empêchent l'attraction intuitive de naître. C'est pour cela que nous ne pouvons pas prendre directement la notion de l'intervalle original qui résulte du nombre premier 11.

Considérons de la même manière le mouvement indirect. Soit, sur la figure (84), un son émis d'où nous détachons intuitivement le son implicite placé à une octave au-dessous du son donné. Nous prenons pour pivot ce son implicite. Il naît de ce pivot une série d'attractions indirectes qui ne sont pas autre chose que celles qui résultent du chapitre IV.



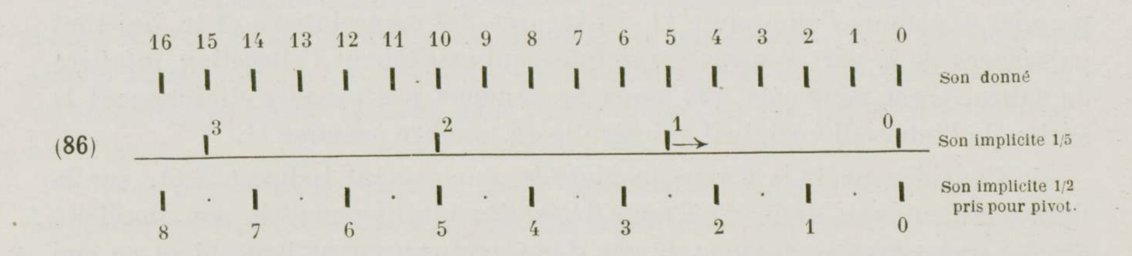
Les attractions indirectes, en ce qui concerne l'intervalle original $\left(\frac{5}{4}\right)$ se font en montant.

Dans les attractions intuitives directes, au lieu de prendre pour pivot le son primitif, on peut prendre un son implicite d'ordre impair qu'on suppose induitivement détaché, comme dans le schéma (**85**).



Dans ce mouvement direct, le son implicite 1/2 se meut en vertu des attractions qui résultent du son implicite 1/5 pris pour pivot, entraînant avec lui le son donné.

On peut opérer de la même manière à l'égard des attractions indirectes. Nous prenons le son implicite 1/2 pour pivot et nous considérons les attractions indirectes développées sur le son implicite 1/5, lequel entraîne le son donné dans son mouvement, figure (**86**).



Il résulte de ce qui précède que chaque intervalle original caractérise un son implicite déterminé.

§ 13. — **Intervalles différentiels.**

Un intervalle différentiel est en général celui qui est défini par une fraction $\left(\frac{p}{q}\right)$ dans laquelle, ni p, ni q ne sont égaux à l'unité. Maintenant que nous avons été amenés à tenir compte des faits de périodicité, nous dirons

qu'un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ est différentiel quand, ni p, ni q, ne sont exclusivement formés avec le facteur premier 2 élevé à une certaine puissance.

Nous avons fait remarquer que les intervalles originaux ne donnaient pas lieu directement à la notion d'aucun autre son que les deux sons donnés. Il en est tout autrement des intervalles différentiels, qui donnent la notion d'un support réel qui n'est ni l'un ni l'autre des deux sons émis. De plus, lorsque le support virtuel de l'intervalle différentiel a été antérieurement exprimé, l'expression de cet intervalle différentiel rappelle ce support virtuel, dont chacun des deux sons constitue un son implicite. Ce support virtuel est d'ailleurs un son qui n'est équivalent à aucun des deux sons de l'intervalle différentiel donné. Il suit de là que, lorsqu'on fait parcourir à un son un intervalle différentiel, la notion de direction n'a plus la simplicité qu'elle avait avec les intervalles originaux. Pour se faire une idée de cette notion de direction, il est indispensable de tenir compte de l'existence de l'un ou de l'autre des sons latents auxquels se rattache nécessairement l'intervalle différentiel considéré.

La théorie des trois sons ne mettant en évidence que des intervalles primaires, les seuls intervalles différentiels que l'on puisse envisager directement sont les suivants, en se limitant à la dixième empreinte :

$$\left(\frac{6}{5}\right), \quad \left(\frac{7}{6}\right), \quad \left(\frac{10}{9}\right)$$

Nous aurons sans doute à considérer dans la suite d'autres intervalles primaires plus petits, mais nous en ferons abstraction pour le moment, afin d'éviter des redites inutiles.

Nous devons rattacher tout intervalle différentiel à des intervalles originaux dont il forme la différence. Considérons dès lors, dans le tableau des dédoublements ou des concentrations directs, les mouvements qui se font suivant les intervalles différentiels considérés, mais seulement parmi les schémas où l'un des mouvements se fait suivant un intervalle original.

Considérons par exemple l'intervalle $\left(\frac{6}{5}\right)$, on le trouve associé à $\left(\frac{5}{4}\right)$ dans les formations (**45**) A P m et (**48**) A P m. Le mouvement du son s'effectue directement dans le sens $\left(\frac{4}{5}\right)$ pour l'intervalle original. Il s'effectue en montant suivant $\left(\frac{6}{5}\right)$ pour l'intervalle différentiel.

Ainsi, l'intervalle différentiel $\left(\frac{6}{5}\right)$, considéré dans ses rapports avec l'intervalle direct $\left(\frac{4}{5}\right)$, est parcouru directement en plaçant, dans l'expression de l'intervalle le nombre 5 au dénominateur.

Considérons de même l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$, dans sa relation avec l'intervalle original $\left(\frac{7}{8}\right)$, les formations (45) $A\ I\ p = 3$ et (48) $A\ I\ p = 8$ montrent qu'il doit être parcouru dans le sens obtenu en portant le facteur 7 au dénominateur, pour correspondre au mouvement direct $\left(\frac{8}{7}\right)$.

Cette règle est générale. Nous en verrons un développement plus complet à propos des cadences et des accords parfaits.

On verra par exemple que l'intervalle $\left(\frac{6}{5}\right)$ associé à l'intervalle $\left(\frac{4}{3}\right)$, pour être parcouru directement, doit être écrit dans le sens défini en plaçant le facteur 6 ou (2 × 3) au dénominateur.

$$\overleftarrow{\qquad\qquad}\ \overrightarrow{\qquad\qquad}$$
$$\left(\frac{5}{6}\right)\quad\left(\frac{1}{1}\right)\qquad\left(\frac{4}{3}\right)$$

On verra également que l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$ associé à l'intervalle $\left(\frac{2}{3}\right)$, pour être parcouru directement, doit être écrit en plaçant le 6 au dénominateur

$$\overleftarrow{\qquad\qquad}\cdot\overrightarrow{\qquad\qquad}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)\qquad\left(\frac{1}{1}\right)\quad\left(\frac{7}{6}\right)$$

Nous n'en disons pas davantage sur ce sujet, parce que nous serons obligé d'y revenir à propos des cadences et des accords parfaits.

§ 14. — Généralisation de la théorie des trois sons.

Les faits de périodicité entraînent avec eux une généralisation inévitable dans les notions de dédoublement et de concentration des sons.

Considérons par exemple un son S qui se dédouble en deux autres S_1 et S_2 en conformité de la théorie primitive des trois sons.

$$(87)\qquad \begin{array}{ccc} S_2 & S & S_1 \\ | & | & | \\ \xleftarrow{\quad D \quad} & \cdot & \xrightarrow{\quad M \quad} \end{array}$$

soit M l'intervalle parcouru en montant et D l'intervalle parcouru en descendant.

Au lieu de considérer le son S dans un état unique, considérons-le dans deux états successifs séparés entre eux par une octave S et S^1

S S^1
|< . . . . octave . . . . >|

(88) | | | |
S S'_1 S'_2 S^1
M → ← D

Il résulte des faits de périodicités que les sons S et S^1 de la figure (88) sont sollicités de la même manière que le son S de la figure (87). Le son S peut donc monter de l'intervalle M et le son S^1 descendre de l'intervalle D, pour aboutir aux deux sons S'_1 et S'_2. Ainsi, le son SS^1 (car les deux sons S et S^1 n'en font qu'un en vertu de la périodicité) peut se dédoubler en deux autres S'_1 et S'_2.

On obtient une conclusion analogue, à l'égard de la concentration, en passant de la figure (89) à la figure (90).

S_2 S S_1
(89) | | |
M → . ← D

S S^1
|< . . . . octave . . . . >|

(90) | | | |
S S'_1 S'_2 S^1
← D M →

La concentration se fait sur le même son $S\,S^1$, mais dans deux états différents l'un de l'autre d'une octave.

Ces conséquences ne sont pas les seules qu'entraîne la notion de périodicité. On se souvient que, à propos du dédoublement ou de la concentration des sons, nous avons fait connaître la nécessité de faire les opérations en se servant soit d'une seule fenêtre, soit d'une seule empreinte. La notion de périodicité étant acquise, les opérations peuvent se faire moyennant deux fenêtres ou deux

empreintes qui sont séparées entre elles par une ou plusieurs octaves. C'est ainsi par exemple qu'un dédoublement direct peut se faire moyennant une montée de $\left(\frac{8}{7}\right)$ et une descente de $\left(\frac{4}{5}\right)$ de même pour la concentration.

(91) $$\left(\frac{4}{5}\right) \longleftarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longrightarrow \left(\frac{8}{7}\right)$$

L'opération s'est faite avec les deux fenêtres 4 et 8 distantes d'une octave.

(92) $$\left(\frac{7}{8}\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longleftarrow \left(\frac{5}{4}\right)$$

On obtiendrait de même :

(93) $$\left(\frac{2}{3}\right) \longleftarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longrightarrow \left(\frac{8}{7}\right)$$

(94) $$\left(\frac{7}{8}\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longleftarrow \left(\frac{3}{2}\right)$$

On trouverait encore :

(95) $$\left(\frac{8}{9}\right) \longleftarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)$$

(96) $$\left(\frac{3}{4}\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longleftarrow \left(\frac{9}{8}\right)$$

L'avant-dernier des mouvements indiqués donne lieu à une incohérence importante qui tient à ce fait que la somme des deux intervalles primaires originaux $\left(\frac{9}{8}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)$ est égale à un intervalle original primaire $\left(\frac{3}{2}\right)$. Nous aurons à y revenir à cause des conséquences qu'il sera indispensable d'en déduire.

CHAPITRE VII

Cadence et Évolution

---

§ 1. — **Groupement de trois sons** (C).

Nous allons étudier, parmi les groupements de 3 sons, signalés au chapitre III § 7, ceux qui n'utilisent que les 3 premières empreintes, ou les 3 premières fenêtres. Les intervalles parcourus ne comportent que les nombres 1, 2 et 3. Ce sont les groupements (45) C, (46) C, (47) C, et (48) C, savoir :

	←——— · ———→						
Intervalles :	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	Nombres :	2	3	4
	←——— · ———→						
	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$
	———→ ←———						
	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$		1	2	3
	———→ ←———						
	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

Le premier correspond à un dédoublement direct première manière, le second à un dédoublement direct seconde manière, le troisième à une concentration directe première manière, et le quatrième à une concentration directe deuxième manière.

Ce qu'il y a de particulièrement remarquable dans ces groupements, c'est qu'en fait les trois sons se réduisent à deux, si on tient compte de la périodicité. C'est qu'en effet les deux sons des groupements P (chap. VI § 1, se réduisent à un seul. Ces combinaisons conduisent donc en réalité à la simple expression d'un intervalle général conçu comme on l'a dit au chapitre VI § 8. L'intervalle ainsi caractérisé n'est autre que l'intervalle original qui se rapporte au nombre premier absolu 3.

§ 2. — Cadence proprement dite.

Nous désignons sous le nom de cadence proprement dite le premier des quatre groupements définis au paragraphe précédent. Nous constatons que, dans ce dédoublement, les sons se trouvent complètement arrêtés au repos, après leur mouvement, et que cet arrêt consacre l'intervalle d'octave qui sépare les sons extrêmes. $\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{1}\right)$ Cette propriété, unique dans la série des intervalles primaires, tient à ce fait que le nombre 3 est le seul qui soit immédiatement précédé et suivi d'un nombre puissance de 2 : savoir 2 et 4.

§ 3. — La cadence est aussi une concentration.

On a vu au chapitre VI § 14 comment on pouvait généraliser la théorie des 3 sons, en tenant compte de la périodicité. Imaginons que le dédoublement (**87**) soit précisément la cadence proprement dite définie au paragraphe précédent. L'intervalle montant est $M = \left(\frac{4}{3}\right)$ et l'intervalle descendant $D = \left(\frac{2}{3}\right)$. Leur somme en valeur absolue est l'octave $\left(\frac{2}{1}\right)$. Considérons alors la transformation fournie par la figure (**88**) ; les deux sons S'_1 et S'_2 se trouvent confondus en un seul. C'est ainsi que la cadence proprement dite peut être considérée à la fois comme un dédoublement et comme une concentration de sons.

§ 4. — **Cadence mélodique.**

Considérons la cadence proprement dite, figure (**97**). Nous voyons le son partir d'une position préalable S et aboutir après dédoublement aux deux sons S_1 et S_2 qui n'en font en réalité qu'un seul, puisqu'ils sont à l'octave l'un de l'autre. Comme le son S_2 est implicitement contenu dans le son S_1, nous pou-

$$S_2 \qquad S \qquad S_1$$

(**97**)

$$\left(\frac{2}{3}\right) \longleftarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)$$

vons ne pas l'énoncer. Il ne reste alors explicitement exprimée que la simple montée de l'intervalle $\left(\frac{4}{3}\right)$. C'est ce que nous nommons la cadence mélodique.

Considérons, de la même manière, l'expression par concentration qui résulte de la transformation indiquée au § 3 (cette transformation n'est d'ailleurs pas autre chose que le quatrième groupement du § 1). Cette expression est figurée au schéma (**98**). Les sons S_1 et S'_1, espacés d'une octave, se concentrent en S. Mais le son S_1 est implicitement compris dans S'_1, on peut ne pas l'exprimer et la cadence se trouve définie par la simple descente du son S'_1 d'un intervalle $\left(\frac{2}{3}\right)$. C'est une seconde expression de la cadence mélodique :

$$S_1 \qquad S \qquad S'_1$$

(**98**)

$$\left(\frac{3}{4}\right) \longrightarrow \left(\frac{1}{1}\right) \longleftarrow \left(\frac{3}{2}\right)$$

La cadence mélodique se trouve ainsi réduite à la simple énonciation d'un intervalle mélodique, soit $\left(\frac{4}{3}\right)$ en montant, soit $\left(\frac{2}{3}\right)$ en descendant.

Ces faits sont d'ailleurs corroborés par le second et par le troisième des quatre groupements indiqués au § 1.

L'intervalle $\left(\frac{4}{3}\right)$ se nomme quarte et l'intervalle $\left(\frac{2}{3}\right)$ se nomme quinte. Ainsi écrits la quarte et la quinte sont parcourus dans le sens direct pour former cadence.

§ 5. — **Evolution.**

Nous aurions pu considérer en sens inverse les quatre groupements du § 1. Tous les déplacements des sons se seraient effectués en sens inverse, c'est-à-dire dans le sens indirect. Ces groupements inverses des cadences se nomment évolutions et les parcours des intervalles de quarte en descendant $\left(\frac{3}{4}\right)$, ou de quinte en montant, $\left(\frac{3}{2}\right)$, se nomment évolutions mélodiques.

§ 6. — **Dominante et Fondamentale.**

La quarte et la quinte telles qu'elles ont été définies au § 4 forment un même intervalle général, celui qui est caractérisé par le nombre premier 3 ; chacun des deux états particuliers qui forme la quarte ou la quinte se trouve être le renversement de l'autre. Dans la quarte, la réplique est formée par le son le plus grave et le repos par le son le plus élevé ; dans la quinte c'est le contraire. La direction de ces deux intervalles originaux est très caractérisée, elle est montante pour la quarte et descendante pour la quinte ; le mouvement indirect, appelé évolution, se fait en sens inverse.

Les deux sons qui constituent l'intervalle de cadence, quarte montante ou quinte descendante portent chacun un nom particulier. Le son d'où l'on part pour faire la cadence s'appelle dominante, c'est le son qui est préalable ; le son auquel on aboutit s'appelle fondamentale, c'est le son sur lequel porte la cadence en s'y arrêtant.

§ 7. — **Cadence partielle.**

Le moment est venu de rendre compte et d'expliquer plus complètement ce que nous n'avons fait qu'esquisser au § 13 du chapitre VI. Exami-

nons l'intervalle différentiel $\left(\frac{6}{5}\right)$, qui renferme le facteur 6 au numérateur et voyons quel est le sens du parcours direct en rattachant ce mouvement à l'intervalle original caractérisé par le nombre 3.

Considérons les quatre sons *R*, *S*, S^1 et *V* dont les vibrations seraient proportionnelles à la série des nombres 8, 10, 12 et 15, conformément aux

	R	*S*	S^1	*V*
	I	I	I	I
(**99**)	8	10	12	15

$$< \cdots \left(\frac{3}{2}\right) \cdots >$$

$$< \cdots \left(\frac{3}{2}\right) \cdots >$$

$$<\cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot><\left(\frac{6}{5}\right)><\cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot>$$

indications mentionnées sur la figure (**99**). Nous constatons qu'entre les sons *R* et S^1 d'une part, et *S* et *V* d'autre part, il y a un intervalle de quinte, soit $\left(\frac{3}{2}\right)$. Entre *R* et *S* d'une part, et S^1 et *V* de l'autre, il y a un intervalle de $\left(\frac{5}{4}\right)$, c'est-à-dire un intervalle original primaire. Entre *S* et S^1 il existe un intervalle de $\left(\frac{6}{5}\right)$, c'est-à-dire un intervalle différentiel.

Reportons-nous maintenant à ce qui a été dit au § 14 du chapitre I, nous voyons que l'intervalle différentiel entre les sons *S* et S^1 forme les sons conjugués de l'intervalle original de *R* à *V*, à des octaves près. Si on supprime en effet les facteurs 2 des nombres 8, 10, 12 et 15 , on trouve 1, 5, 3, 15. Le premier est l'unité et le dernier est bien le produit des nombres intermédiaires 5 et 3.

Or, on se souvient que nous avons fait remarquer la complication résultant des intervalles différentiels, pour la notion de direction, en indiquant que l'expression des deux sons *S* et S^1 entraînait nécessairement celle de deux autres sons *R* et *V*, ou tout au moins de l'un des deux.

Parmi les deux sons dont l'intervalle *S* S^1 donne la notion, celui qui est le plus caractérisé est évidemment le son *R*, qui forme le support réel, car le son *R* n'a pas besoin d'être exprimé pour être senti. Rendons-nous compte de la direction à prendre pour l'intervalle *S* S^1, en le considérant tout d'abord dans ses relations avec le son *R*.

Partons du son S^1 et parcourons l'intervalle de S^1 à S en descendant, c'est-à-dire conformément à l'expression $\left(\frac{5}{6}\right)$. Au moment où nous arrêtons le son en S, nous ressentons immédiatement l'impression du support réel R. Nous avons par conséquent le sentiment d'une descente de $\left(\frac{2}{3}\right)$ c'est-à-dire d'une cadence, et pourtant le son réel n'a pas parcouru tout l'intervalle de cadence. C'est ce que nous exprimons en disant que le son a fait une cadence partielle.

Comme le mouvement de cadence est direct, le mouvement de cadence partielle est également direct, et nous disons que l'intervalle différentiel de S à S^1, pour être parcouru dans le sens direct, en se référant à la cadence, c'est-à-dire à l'intervalle $\left(\frac{2}{3}\right)$, doit être parcouru en descendant, et par suite en plaçant le terme 6 au dénominateur $\left(\frac{5}{6}\right)$.

Nous ajoutons enfin que quand le son a parcouru en descendant l'intervalle de S^1 à S soit $\left(\frac{5}{6}\right)$, il passe directement, par attraction majeure au son R, en prenant comme pivot le son préalable S^1. On a en effet ; chap. II § 8 :

$$\left(\frac{5 - 3}{6 - 3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)$$

Dans le mouvement de cadence considéré, le son part de la dominante S^1 et aboutit à la réplique R_5 de la fondamentale R (schéma **82**).

Tout ce qui précède s'applique à l'intervalle différentiel S^1 S considéré comme la différence des deux intervalles originaux R S^1 et R S. Envisageons maintenant le même intervalle comme formé par la différence S V moins S^1 V ; autrement dit, rapportons le mouvement au support virtuel V.

Nous disons tout d'abord que le son V ne résulte pas expressément de l'expression de l'intervalle S S^1. Pour avoir la notion du support virtuel, il faut que le son V ait été antérieurement exprimé et que notre oreille en ait gardé les empreintes. Ce son V devient alors le pivot du mouvement, le son S^1 se meut sur ce pivot avec lequel il forme l'intervalle $\left(\frac{4}{5}\right)$ et l'attraction majeure le conduit à l'intervalle $\left(\frac{4 - 2}{5 - 2}\right)$ du pivot V, soit à $\left(\frac{2}{3}\right)$ ou à une quinte au-dessous. Il y a donc, encore ici, l'expression d'une cadence entre le pivot V et le son S, sur lequel s'est arrêté le mouvement. Quant au son réel, il n'a parcouru qu'une partie de l'intervalle de cadence, de S^1 à S, on dit encore qu'il y a cadence partielle.

Ici encore, pour donner l'impression d'une cadence, c'est-à-dire d'un mouvement direct, l'intervalle doit encore être parcouru en descendant, soit $\left(\frac{5}{6}\right)$. Mais, à la différence de ce qui se passait dans le premier cas, il ne part pas de la dominante, mais aboutit bien au son S sur lequel porte la cadence.

Dans les deux cas le mouvement de cadence est bien marqué par le mouvement descendant $\left(\frac{5}{6}\right)$, mais dans le premier, cette cadence se réfère à l'intervalle $\left(\frac{2}{3}\right)$ entre S^1 et R, et dans le second elle se réfère à l'intervalle $\left(\frac{2}{3}\right)$ entre V et S. Il ne s'agit donc pas de la même cadence. On verra que cette différence caractérisera en partie la distinction des modes.

C'est tout ce que nous disons, pour le moment, de la direction de l'intervalle $\left(\frac{5}{6}\right)$, rapportée au nombre 3. Nous complèterons ce qu'il y a à dire sur cet intervalle différentiel, à propos du nombre 5, quand nous traiterons des accords parfaits.

Nous allons considérer encore l'intervalle différentiel $\left(\frac{7}{6}\right)$, qui, lui aussi, utilise pour l'un de ces termes le facteur premier 3 et qui se réfère par conséquent aux intervalles de cadence. L'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$ est formé de la différence des deux intervalles originaux primaires

$$\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{7}{6}\right)$$

Envisageons, d'une manière analogue, à ce qui a été fait pour la figure (**99**), les quatre sons R, S, S^1 et V de la figure (**100**), pour lesquels

V	S	S^1	R
I	I	I	I
21	24	28	32

(**100**)

$$<\cdot\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\cdot>$$

$$<\cdot\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\cdot>$$

$$<\left(\frac{8}{7}\right)><\left(\frac{7}{6}\right)><\left(\frac{8}{7}\right)>$$

les vibrations seraient proportionnelles à la série des nombres 21, 24, 28, 32 conformément aux indications portées sur la figure. Nous constatons qu'entre les sons R et S d'une part, et V et S^1 d'autre part, il y a un intervalle de quarte $\left(\frac{4}{3}\right)$. Entre R et S^1 d'une part, et V et S d'autre part, il y a un

intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$, c'est-à-dire un intervalle original primaire. Entre S et S^1 il existe un intervalle de $\left(\frac{7}{6}\right)$, c'est-à-dire un intervalle différentiel primaire, lequel est précisément celui que nous voulons envisager.

Reportons-nous maintenant à ce qui a été dit au § 14 du chapitre I, nous voyons que l'intervalle différentiel entre S et S^1 est formé par les sons conjugués de l'intervalle original R V, à des octaves près. Si on supprime en effet les facteurs 2 de la série des nombres 21, 24, 28, 32, on trouve 21, 3, 7, 1. Le dernier est l'unité, il correspond au support réel R ; le premier 21 est formé par le produit des nombres intermédiaires, 3 et 7, c'est le support virtuel.

L'expression de l'intervalle différentiel S S^1 entraîne la notion des sons R et V, ou tout au moins du premier.

Rapportons le mouvement entre les deux sons S et S^1, d'abord au support réel R. Partons du son S pour aboutir à S^1, de manière à parcourir l'intervalle dans le sens $\left(\frac{7}{6}\right)$. Au moment où nous nous arrêtons sur le son S^1, nous ressentons l'impression du support réel R ; nous ressentons par conséquent le sentiment d'une montée de $\left(\frac{4}{3}\right)$ c'est-à-dire d'une cadence, et pourtant le son réel n'a pas parcouru tout l'intervalle de la cadence, mais seulement $\left(\frac{7}{6}\right)$. C'est ce que nous exprimons en disant que le son a fait une cadence partielle.

Comme le mouvement de cadence est direct, le mouvement de cadence partielle est également direct, et nous dirons que l'intervalle différentiel $\left(\frac{7}{6}\right)$ de S à S^1, pour être parcouru dans le sens direct en se référant à l'intervalle $\left(\frac{4}{3}\right)$, c'est-à-dire à la cadence, doit être parcouru en montant, et par suite en plaçant le terme 6 au dénominateur $\left(\frac{7}{6}\right)$.

Nous ajoutons enfin que quand le son a parcouru en montant l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$, il passe directement, par attraction majeure, au son R, en prenant comme pivot le son préalable S. On a en effet (chap. II, § 8) :

$$\left(\frac{7 - 3}{6 - 3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)$$

Dans le mouvement de cadence considéré, le son part de la dominante S et aboutit à la réplique R_7 de la fondamentale R (schéma **82**).

Tout ce qui précède s'applique à l'intervalle différentiel S S^1 considéré comme la différence des intervalles originaux S R et S^1 R. Envisageons maintenant le même intervalle comme formé par la différence S^1 V moins S V ; autrement dit, rapportons le mouvement au support virtuel V.

Nous disons tout d'abord que le son V ne résulte pas expressément de

l'énonciation de l'intervalle $S\ S^1$. Pour avoir la notion du support virtuel V, il faut qu'il ait été antérieurement exprimé et que notre oreille en ait gardé les empreintes. Ce son V devient alors le pivot du mouvement, le son S se meut sur ce pivot avec lequel il forme l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$, en vertu des attractions qui résultent de cet intervalle. Nous constatons que l'attraction majeure ne peut pas faire parcourir au son S l'intervalle $S\ S^1$; il faudrait pour cela que l'on puisse passer de l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$ à $\left(\frac{4}{3}\right)$ par attraction directe, tandis que l'attraction majeure ne donne que $\left(\frac{5}{4}\right)$.

Mais si l'attraction réelle ne permet pas le mouvement, il en est autrement de l'attraction intuitive ; le son S comporte un son implicite formant avec le pivot l'intervalle renversé $\left(\frac{4}{7}\right)$. Or cet intervalle donne une attraction qui peut conduire le son à $\left(\frac{2}{3}\right)$; on a en effet à une demi-unité près :

$$\left(\frac{3 \times 4}{7}\right) = 2$$

Si de $\left(\frac{4}{7}\right)$ on peut aboutir réellement à $\left(\frac{2}{3}\right)$, on peut aboutir intuitivement de $\left(\frac{8}{7}\right)$ à $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Le son S est donc conduit à S^1 en vertu d'une attraction intuitive. Il y a par conséquent, ici encore, l'expression d'une cadence entre le pivot V et le son S^1 sur lequel s'est arrêté le mouvement. Quant au son réel, il n'a parcouru qu'une partie de l'intervalle de cadence, de S à S^1 , on dit encore qu'il y a cadence partielle.

Ici encore, en s'appuyant sur le support virtuel V, le mouvement direct de l'intervalle différentiel s'effectue en montant $\left(\frac{7}{6}\right)$. A la différence de ce qui avait lieu dans le premier cas, il ne part pas de la dominante, mais il aboutit bien au son S^1 sur lequel porte la cadence issue de V. Dans les deux cas la cadence est bien marquée par le mouvement montant, dans le premier c'est celle de S à R, dans le second celle de V à S^1 , ce n'est donc pas la même cadence.

Les intervalles différentiels formés entre les dix premières empreintes ne comportent aucun autre intervalle primaire utilisant le facteur 3. Il n'y a que $\left(\frac{5}{6}\right)$ et $\left(\frac{7}{6}\right)$. Ce sont donc les seuls qui puissent donner lieu à des cadences partielles.

§ 8. — Dédoublement et concentration des sons résultant des cadences partielles.

Considérons les cadences partielles résultant du parcours de $\left(\frac{5}{6}\right)$. Le son part du son supérieur de cet intervalle, et aboutit en descendant au son inférieur. Pour obtenir un dédoublement qui confirme la cadence partielle, il suffit de partir du même son initial et de marquer la cadence montante de $\left(\frac{4}{3}\right)$. Nous obtenons ainsi le dédoublement marqué par la figure (**101**) :

(**101**)

$$\begin{array}{ccc} S & P & R \\ \longleftarrow & \cdot & \longrightarrow \\ | & | & | \\ \left(\frac{5}{6}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{4}{3}\right) \end{array}$$

Le mouvement de cadence partielle indiquée par la descente de P à S se réfère tout naturellement au support réel, et cela est confirmé par l'expression R de ce support réel de l'intervalle $S\,P$.

Si nous voulons obtenir une concentration, nous considérerons que, la cadence partielle étant énoncée par la descente de $\left(\frac{5}{6}\right)$, il faut opérer une cadence ascendante aboutissant au même son. Cela donne la figure (**102**)

(**102**)

$$\begin{array}{ccc} V & P & S \\ | & | & | \\ \cdot \longrightarrow & & \longleftarrow \cdot \\ \left(\frac{3}{4}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{6}{5}\right) \end{array}$$

qui marque une concentration ; la descente de $\left(\frac{5}{6}\right)$ marquée de S à P se fait bien en vertu du support virtuel V de l'intervalle $P\,S$ puisque ce son V a été préalablement exprimé.

Si nous considérons l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$ qui forme la cadence partielle ascendante, il convient de l'associer à la cadence descendante pour obtenir le dédoublement et la concentration analogues aux précédentes et que nous indiquons sur les figures (**103**) et (**104**) :

(**103**)

R	*P*	*S*
$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{7}{6}\right)$

(**104**)

S	*P*	*V*
$\left(\frac{6}{7}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$

Nous allons donner l'interprétation intuitive des dédoublements et des concentrations qui précèdent :

Considérons, sur une première ligne le son émis, sur une seconde ligne le son implicite 1/2 supposé faisant corps avec le premier dont il est partie intégrante. Prenons pour pivot le son implicite 1/3 figuré sur la troisième ligne, nous obtenons la figure (**105**).

(**105**)

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Son émis	I	I	I	I $\xrightarrow{\varphi^1}$	I	$\xleftarrow{\varphi}$ I	I	I	I	I	I
Son implicite 1/2	I	·	I	·	I	·	I $\xrightarrow{f^1}$	·	$\xleftarrow{f}$ I	·	I
	5		4		3		2		1		0
Pivot implicite 1/3		I			I			I			I
		3			2			1			0

La fenêtre n° 1 du pivot provoque le dédoublement qui doit donner lieu à la cadence. Si on laissait cette cadence s'achever complètement, l'un des sons monterait conformément à la flèche f^1 et l'autre descendrait conformément à la flèche f. Mais on peut constater que, pendant le mouvement de descente indiqué par f conformément à l'attraction de la fenêtre n° 1, l'empreinte 5 du son émis, déplacé en vertu de l'attraction intuitive précédente, vient poser sur la fenêtre 2 après avoir subi une descente suivant la flèche φ. Le son peut s'arrêter là, d'autant mieux qu'il s'agit de la fenêtre 2 du pivot, à l'octave au-dessous de la fenêtre 1. Le mouvement de descente indiqué par la flèche f, c'est-à-dire la cadence, n'est pas complètement effectué, elle ne s'accomplit que partiellement suivant la flèche φ. Les mouvements combinés f^1 en montant et φ en descendant correspondent à la figure (**101**).

On combine de même le mouvement complet de la flèche f avec le mouvement incomplet φ^1 et on obtient l'explication intuitive du mouvement de la figure (**103**).

Les concentrations (**102**) et (**104**) se justifient intuitivement d'une manière tout à fait analogue.

Remarque. — Lorsque le dédoublement est effectué par la fenêtre 1 de la figure (**105**), nous pouvons admettre que le son, soit montant, soit descendant, n'effectue qu'une partie seulement du mouvement de cadence, conformément aux indications des flèches φ et φ^1. Nous obtenons alors un dédoublement direct comportant une descente de $\left(\frac{5}{6}\right)$ en même temps qu'une montée de $\left(\frac{7}{6}\right)$, mouvements marquant chacun une cadence partielle par le support réel commun 6. D'un autre côté, si nous nous reportons au tableau (**47**) A I $p = 4$, nous trouvons que la disposition des trois sons telle que nous venons de la dire, correspond à une concentration. Il y a donc une contradiction, mais il est facile de voir que cette contradiction n'est qu'apparente.

Nous venons de voir avec la figure (**108**) comment se justifie le mécanisme intuitif du dédoublement considéré. Voyons maintement comment, en nous reportant aux explications du chapitre III, se justifie la concentration des trois mêmes sons :

Supposons que l'on examine le cas de la concentration des deux sons et admettons que ces sons se trouvent amenés tous deux à la position unique qui correspond à la concentration. Nous figurons cette position de concentration sur une première ligne, figure (**106**). Considérons le son implicite 1/2 faisant corps avec le premier, ou plutôt avec les premiers, puisqu'il s'agit de deux sons concentrés, de manière à les suivre chacun dans leurs déplacements.

Mais, au lieu de considérer le pivot implicite 1/3 comme sur la figure (**105**), envisageons le pivot implicite 1/2.

		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	Son émis	I	I	I	I φ'_1	I φ_1	I	I	I	I	I	I
(**106**)	Son implicite 1/2	I	·	I	· n	I	· n^1	I	·	I	·	I
		5		4		3		2		1		0
	Pivot implicite 1/2	I		I		I		I		I		I
		5		4		3		2		1		0

Le son implicite 1/2, faisant corps avec le son émis, est à l'unisson du pivot, la fenêtre 3 reçoit l'empreinte 3. Déplaçons l'ensemble des sons supérieurs faisant corps ensemble, d'une part en montant jusqu'à ce que le point neutre n tombe sur la fenêtre 3, d'autre part en descendant jusqu'à ce que le point neutre n^1 tombe sur la même fenêtre 3. Les deux sons ainsi déplacés ont un point neutre chacun sur la même fenêtre, ils sont en équilibre instable et les attractions tendent à les ramener à l'unisson. C'est ainsi que se justifie intuitivement la concentration indiquée (**47**) A I $p = 4$. Les combinaisons des sons des figures (**105**) et (**106**) sont les mêmes, seuls les pivots diffèrent. Mais ce changement dans le pivot intuitif suffit à altérer le sens du mouvement. Dans la figure (**105**) c'est la fenêtre 1 qui sépare les sons, fenêtre qui correspond à l'empreinte 3 du son émis. Dans la figure (**106**) c'est la fenêtre 3 du pivot qui opère, et qui correspond à l'empreinte 6 du son émis. Il n'y a donc pas contradiction. Cependant ces faits montrent combien est complexe l'étude des questions de direction, dès qu'il s'agit d'intervalles différentiels. Ce que nous en avons dit suffit pour justifier tous les cas qui pourront se présenter.

§ 9. — **Cadence élidée.**

Nous allons étudier dans ce paragraphe ce que nous convenons d'appeler les cadences élidées, qu'il ne faut pas confondre avec les cadences partielles.

Lorsqu'un son passe d'une réplique de la dominante, par attraction, à

la fondamentale, on dit qu'il fait un mouvement de cadence élidée. La dominante ayant dû être exprimée antérieurement est un son qu'on suppose imprimé dans l'oreille, on la considère comme un pivot. La réplique de la dominante d'où l'on part, rappelle cette dominante, par le support réel ; quant à la fondamentale, elle est indiquée par le son final ; la cadence se trouve donc marquée, par le support réel au départ, et par le son final auquel on aboutit. On dit que la cadence est élidée, parce que la dominante n'est pas réellement exprimée au départ, le support réel seul la répète, il y a en quelque sorte élision de la dominante.

Considérons la dominante D, figure (**107**) et toutes ses répliques R_3, R_5, R_7 et R_9 ainsi qu'on les a définies au schéma (**82**) chap. VI. Traçons au-dessous l'emplacement de la fondamentale F ou F^1 suivant que la cadence est montante ou descendante. On voit tout de suite que, ni R_7, ni R_9 ne peuvent conduire à la fondamentale par des attractions. Il ne reste à considérer que les répliques R_3

(**107**)

	$\xleftarrow{f}$ R_3		R_7	D	R_9	R_5 $\xrightarrow{f_1}$		$\xleftarrow{f^1}$ R'_3
F				$\mid$			F^1	
$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right)$		$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$

et R_5. La réplique R_3, reproduite en R'_3 aboutit à la fondamentale F ou F^1 par une descente de $\left(\frac{8}{9}\right)$ qui est le mouvement de l'attraction principale d'une quarte descendante, par augmentation, ou d'une quinte ascendante, par diminution. Ces mouvements de cadence élidée sont marqués par les flèches f et f^1.

Quant à la réplique R_5, elle aboutit à la fondamentale F^1 par mouvement ascendant de $\left(\frac{16}{15}\right)$, indiqué par la flèche f_1 et qui correspond à l'attraction principale croissante de l'intervalle original $\left(\frac{5}{4}\right)$.

§ 10. — **Cadence élidée partielle**.

La cadence élidée partielle correspond à un mouvement qui part d'une réplique de la dominante et qui aboutit par attraction à une réplique de la fondamentale.

La dominante a été exprimée antérieurement, elle a impressionné notre oreille, nous la prenons pour pivot. En partant d'une réplique du pivot, nous accusons la dominante par le support réel, en aboutissant à une réplique de la fondamentale, nous accusons cette fondamentale par le support réel. La dominante étant exprimée au départ et la fondamentale à la fin du mouvement, la cadence est accusée. Elle est élidée, parce que la dominante n'est pas exprimée par le son réel du départ ; elle est partielle, parce que le son réel n'aboutit pas à la fondamentale.

(**108**)

R_3 R_7 D R_9 R_5 R'_3

f f^{I} f^{II} f^{III}

F R_9 R_5 R_3 R_7 F^{I}

Considérons, figure (**108**), sur une première ligne une dominante D avec toutes ses répliques, conformément au schéma (**82**) chapitre VI. Considérons de même, sur une seconde ligne, une fondamentale FF^1, avec la série de ses répliques. On voit immédiatement que, pour passer par attraction d'une réplique de la dominante à une réplique de la fondamentale, on ne peut considérer que les répliques 5 et 7 de cette fondamentale. Quant aux répliques de la dominante qui peuvent y aboutir par attraction sur le pivot D, il y a les répliques 3 et 7 d'une part, et 9 et 5 d'autre part, conformément aux mouvements indiqués par les flèches f, f^{I}, f^{II}, f^{III}. Il y a donc quatre cadences élidées partielles, dont voici d'ailleurs le détail :

Intervalle $D\,R_3\left(\frac{3}{4}\right)$ conduisant à R_5 2[e] ligne

$$\left(\frac{3+2}{4+2}\right) = \left(\frac{5}{6}\right) \quad \text{mouvement } f \quad \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{10}{9}\right)$$

Intervalle $D\,R_7\left(\frac{7}{8}\right)$ conduisant à R_5 2[e] ligne

$$\left(\frac{7-2}{8-2}\right) = \left(\frac{5}{6}\right) \quad \text{mouvement } f^{\text{I}} \quad \left(\frac{8}{7}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{20}{21}\right)$$

Intervalle D R_9 $\left(\frac{9}{8}\right)$ conduisant à R_7 2[e] ligne

$$\left(\frac{9-2}{8-2}\right) = \left(\frac{7}{6}\right) \text{ mouvement } f^{\text{II}} \quad \left(\frac{7}{6}\right) - \left(\frac{9}{8}\right) = \left(\frac{28}{27}\right)$$

Intervalle D R_5 $\left(\frac{5}{4}\right)$ conduisant à R_7 2[e] ligne

$$\left(\frac{5+2}{4+2}\right) = \left(\frac{7}{6}\right) \text{ mouvement } f^{\text{III}} \quad \left(\frac{7}{6}\right) - \left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{14}{15}\right)$$

§ 11. — Dédoublement et concentrations avec les cadences élidées et élidées partielles.

Réunissons sur une figure unique les mouvements des schémas (**107**) et (**108**), et marquons par des flèches toutes les attractions qui résultent des cadences élidées et des cadences élidées partielles, nous obtiendrons la figure (**109**).

(**109**)

R_3 R_7 D R_9 R_5 R'_3

F R_9 R_5 R_3 R_7 F^1

Moyennant le pivot D, nous voyons :

1° Que le son R_3 1[re] ligne peut descendre de $\left(\frac{8}{9}\right)$ et monter de $\left(\frac{10}{9}\right)$ c'est un dédoublement qui est le même que celui (**45**) A I $p = 4$. L'intervalle qui sépare les sons, après le dédoublement est $\left(\frac{5}{4}\right)$.

2° Les deux sons R_3 et R_7 première ligne, se concentrent sur le son R_5 2[e] ligne, le premier son monte de $\left(\frac{10}{9}\right)$, le second descend de $\left(\frac{20}{21}\right)$. L'inter-

valle total est $\left(\frac{7}{6}\right)$. Cette concentration remplacera celle qui, dans le tableau (**48**) prolongé aurait été donnée par la série des nombres

$$\left(\frac{1}{14}\right) \quad \left(\frac{1}{13}\right) \quad \left(\frac{1}{12}\right)$$

série qu'on ne peut utiliser puisqu'il y figure le nombre 13 qu'on doit éliminer.

3° Les deux sons R_9 et R_5 1[re] ligne, se concentrent sur le son R_7 2[e] ligne. Le premier monte de $\left(\frac{28}{27}\right)$, le second descend de $\left(\frac{14}{15}\right)$ l'intervalle total est $\left(\frac{10}{9}\right)$, cette concentration remplace tout naturellement celle qui, sur le tableau (**48**) prolongé, correspondrait aux trois nombres

$$\left(\frac{1}{20}\right) \quad \left(\frac{1}{19}\right) \quad \left(\frac{1}{18}\right)$$

nombres qu'on n'a pu utiliser à cause du nombre premier absolu 19.

4° Le son R_5 1[re] ligne se dédouble sur les sons R_7 et F^1 de la 2[e] ligne, il monte de $\left(\frac{16}{15}\right)$ et descend de $\left(\frac{14}{15}\right)$. L'intervalle total entre les sons extrêmes est $\left(\frac{8}{7}\right)$. Ce dédoublement correspond exactement à celui qui résulterait du prolongement du tableau (**45**) jusqu'aux trois nombres 14, 15 et 16.

5° Les sons R_5 et R'_3 de la première ligne se concentrent sur le son F^1 de la seconde, en parcourant les intervalles $\left(\frac{16}{15}\right)$ et $\left(\frac{8}{9}\right)$. L'intervalle total est $\left(\frac{6}{5}\right)$. Cette concentration remplacera celle qui aurait été donnée par le tableau (**48**) prolongé, avec les nombres

$$\frac{1}{12} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{10}$$

qu'on n'a pu utiliser à cause du nombre premier 11.

Tels sont les cinq dédoublements ou concentrations qui résultent des cadences élidées et élidées partielles. Ces opérations se font à l'aide d'un pivot D qui, opérant sur de plus grands intervalles, permet de faire apprécier par l'oreille des mouvements très petits qu'elle serait incapable de mesurer directement.

§ 12. — Echelle des cadences.

L'ensemble des mouvements qui résultent des cadences, des cadences partielles, des cadences élidées et des cadences élidées partielles, constituent de beaucoup les plus importants et les mieux caractérisés de la musique. Si nous faisons abstraction de la seconde cadence partielle, celle qui résulte du support virtuel des intervalles $\left(\frac{6}{5}\right)$ ou $\left(\frac{7}{6}\right)$ et qui forment une catégorie à part, parce que la cadence ne se fait pas sur le même intervalle, nous pouvons grouper ensemble la série de tous les sons qui peuvent servir à former toutes les cadences que nous avons énumérées et se rapportant aux mêmes dominantes et fondamentales. Ces sons sont constitués par tous ceux qui forment les figures (**108**) et (**109**). Nous les reportons sur la figure (**110**). Sur la première ligne, nous plaçons les répliques de la dominante, en cotant les intervalles à partir de la dominante. Sur la seconde ligne, nous plaçons les répliques de la fondamentale, en cotant les intervalles à partir de cette fondamentale. Sur la troisième ligne nous caractérisons les divers sons par une série de lettres qui nous serviront plus tard de point de repère, lettres à côté desquelles nous cotons les intervalles à compter de la fondamentale inférieure :

(**110**)

	R_3			R_7	D	R_9		R_5	R'_3
	$\left(\frac{3}{4}\right)$			$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$		$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$

F	R_1	R_5	R_3	R_7	F^1
$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{7}{4}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$

d	*r*	*m*	*f*	*s*	*l*	*t* ♭	*t*	*d*	r^1
$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{21}{16}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{27}{16}\right)$	$\left(\frac{7}{4}\right)$	$\left(\frac{15}{8}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{4}\right)$

Sous cette forme, on voit que tous les sons portent sur le même support réel, qui est le son fondamental de la cadence, car les dernières cotes ont toutes pour dénominateur des puissances de 2.

L'ensemble de ces sons forme ce que nous appelons l'échelle des cadences.

§ 13. — **Echelles des évolutions.**

Tout ce que nous avons dit des cadences peut se dire, en sens inverse pour les mouvements indirects que nous avons qualifiés évolutions, au § 5. Il suffit pour cela de tout intervertir : le sens du mouvement qui doit devenir indirect ; les supports réels ou virtuels qu'il faut changer l'un en l'autre. C'est ainsi qu'on aboutirait à la construction d'une échelle de sons en tout semblable à celle qui résulte de la figure (**110**), mais avec les mêmes intervalles disposés en sens inverse.

Cette échelle que nous écrivons sur la figure (**111**) constitue ce que nous appelons l'échelle des évolutions. La construction des deux échelles des cadences et des évolutions forme l'origine de la distinction de ce que nous appellerons plus tard les modes.

r'_3	r_5	r_9	F	r_7	r_3
$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{8}{7}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$

(**111**)

D^1	r_7	r_3	r_5	r_9	D
$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$

r^1	m	f	$f\sharp$	s	l	t	d	r	m
$\left(\frac{4}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{8}{15}\right)$	$\left(\frac{4}{7}\right)$	$\left(\frac{16}{27}\right)$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{16}{21}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$

Dans la figure (**110**) nous étions partis, pour la première ligne, de la dominante *D* accompagnée de ses répliques *R* ; ici, nous partons de la fondamentale *F* avec tous ses repos *r*.

Dans la seconde ligne de la figure (**110**) nous avions la fondamentale et ses répliques ; ici, nous avons la dominante et ses repos.

La dernière ligne porte une série de lettres par lesquelles nous désignons les sons correspondants. Ces sons sont cotés à partir de la dominante *D* qui constitue le support virtuel commun à tous les sons.

On remarquera que les lettres par lesquelles nous désignons les sons des échelles des cadences ou des évolutions sont les mêmes, à part les sons marqués $\overset{t}{\flat}$ dans la première et $\overset{f}{\sharp}$ dans la seconde, cependant ces sons ne sont pourtant pas tous identiques. Nous nous bornons pour le moment à cette constatation. Les différences sont petites, elles donnent naissance à de petits intervalles qu'on nomme commas, dont nous étudierons l'importance et la signification musicale, quand nous traiterons de la consonnance.

§ 14. — **Incohérences à signaler.**

La notion de direction se trouve très fortement accusée par les intervalles de cadences que nous avons appelés quinte ou quarte et qui ne constituent que le même intervalle général, intervalle original caractérisé par le nombre premier 3. Dans l'énonciation de cet intervalle, c'est la dominante qui forme le son préalable ; la fondamentale forme le son auquel on aboutit et où l'on s'arrête au repos. Les incohérences qui peuvent se manifester avec l'intervalle de cadence consistent à provoquer un arrêt, c'est-à-dire un repos du son, sur un autre son auquel le mouvement effectué donne en même temps le rôle de dominante. Nous allons examiner quelques cas d'incohérence à signaler.

1° *Incohérence de quarte.*

Reportons-nous au § 7 de ce chapitre, § qui traite des cadences partielles. Nous y avons mentionné deux cas de cadence partielle, suivant qu'on rapporte le mouvement au support réel ou au support virtuel. Bornons-nous à envisager ici le premier cas, c'est-à-dire la cadence partielle rapportée au support réel. Nous avons fait observer que, dans ces conditions spéciales,

la cadence partielle pouvait se définir ainsi : Mouvement d'un son qui, en partant de la dominante aboutit à une réplique de la fondamentale.

(112)

$$\begin{array}{cccccc} & & & D & & \\ & \longleftarrow & & | & & \\ F & R_9 & R_5 & R_3 & R_7 & F^1 \\ | & | & | & | & | & | \end{array}$$

Figurons, sur une première ligne de la figure (**112**), la dominante D, et, sur une seconde ligne, la fondamentale $F F^1$, avec toutes ses répliques R_3, R_5, R_7, et R_9. La réplique R_3 coïncide tout naturellement avec la dominante D. Les mouvements de cadence partielle que nous avons examinés s'appliquaient au déplacement du son D, pour le porter sur l'une des répliques R_5 ou R_7, en parcourant l'un des intervalles $\left(\frac{5}{6}\right)$ ou $\left(\frac{7}{6}\right)$. Nous avons omis à dessein de parler du parcours du son depuis la dominante D jusqu'à la réplique R_9. C'est ce cas particulier que nous voulons examiner ici.

Quand un son part de la dominante D pour aboutir à R_9, il signale, dans cette dernière position, le son fondamentale F: C'est la neuvième empreinte du son mobile qui couvre la huitième du son F. La cadence partielle est donc marquée. Le son D joue le rôle de dominante et F celui de fondamentale. Quant à l'intervalle parcouru de D à R_9 il est moindre que l'intervalle de D à F, c'est donc bien d'une cadence partielle qu'il s'agit. Si d'autre part, on exprime le son R_9 avant le son D, en faisant parcourir au son l'intervalle ascendant compris entre R_9 et D, c'est le son R_9 qui apparaît comme dominante et le son D comme fondamentale. Admettons qu'au lieu d'exprimer d'abord l'un ou l'autre des deux sons R_9 et D on les exprime simultanément, nous ne savons pas si l'intervalle doit être considéré comme montant ou comme descendant. Les deux combinaisons se présentent simultanément, c'est-à-dire que, dans l'expression simultanée des deux sons R_9 et D, deux cadences se présentent à la fois : l'une complète de R_9 à D, avec D pour fondamentale, l'autre partielle de D à R_9, représentant la cadence $D F^1$ dont D est la dominante. Le son D présente donc à un très haut degré le caractère d'une fondamentale, et aussi, mais avec un degré moindre, celui d'une dominante. C'est dans ce double rôle que joue le son D que consiste ce qu'on peut appeler l'incohérence de quarte.

Cette incohérence cesse dès qu'on donne la priorité à un son sur l'autre afin qu'il prenne nettement le caractère de dominante. C'est en cela que consiste ce qu'on nomme la préparation de la quarte.

Bien que la quinte forme le même intervalle original que la quarte, l'expression simultanée de deux sons séparés par un intervalle de quinte ne peut donner lieu à la même incohérence que dans le cas de la quarte. La raison de cette différence est que l'intervalle de quarte parcouru en descendant peut bien être considéré comme une cadence partielle puisque le parcours partiel ainsi effectué par le son est moindre que la cadence mélodique descendante qui est une quinte. Il en est autrement de la quinte montante qui ne peut passer pour une cadence partielle puisque le parcours effectué par le son est plus grand que la cadence mélodique montante, c'est-à-dire la quarte.

2° *Dédoublement incohérent aboutissant à une quinte.*

Nous dirons tout d'abord, une fois pour toutes, que tout dédoublement indirect qui aboutit à une quinte entre les sons extrêmes ne peut déterminer aucune incohérence. C'est qu'en effet, dans le mouvement indirect, les sons n'aboutissent pas au repos, et que par suite ils ne peuvent apporter sur la dominante de la quinte aucun sentiment de repos contradictoire avec la notion de dominante.

Ce qui précède étant admis, on voit immédiatement que les dédoublements directs qui peuvent aboutir à la quinte sont, en tout et pour tout, au nombre de deux. Le premier est celui qui est donné au chapitre III § 7 sur le schéma (**45**) A P M. Le son intermédiaire, qui se divise en deux, parcourt en descendant l'intervalle $\left(\frac{4}{5}\right)$, il aboutit au repos sur la fondamentale de l'intervalle total, il n'y a là aucune incohérence. Quant au parcours montant, il se fait suivant l'intervalle différentiel $\left(\frac{6}{5}\right)$; ce parcours est bien considéré comme direct en montant, en considération du nombre 5 du dénominateur, mais cet arrêt ne se fait pas en raison de la coïncidence du son avec la dominante, mais en raison du support réel 5, qui porte sur la fondamentale.

La seconde combinaison de dédoublement direct qui aboutit à un intervalle de quinte entre les sons extrêmes est celle qui a été donnée au chapitre VI § 14, figure (**95**). Le son parcourt en descendant l'intervalle $\left(\frac{8}{9}\right)$ et en montant l'intervalle $\left(\frac{4}{3}\right)$, intervalles qui sont tous deux originaux. La fondamentale de la quarte parcourue en montant tombe sur la dominante de la quinte, d'où une incohérence fortement caractérisée.

3° *Lorsque deux sons forment entre eux un intervalle de quinte, ils ne peuvent aboutir à une autre quinte sans incohérence.*

Lorsque deux sons, séparés entre eux par un intervalle de quinte, se meuvent pour aboutir à un autre intervalle de quinte, ils se déplacent parallè-

lement, et parcourent le même intervalle. Si on considère ce mouvement, à l'égard du son fondamental de chacune des quintes, il doit être direct, pour marquer le repos sur la fondamentale à laquelle on aboutit. Si on considère le même mouvement, à l'égard de la dominante, il doit être indirect pour ne pas y marquer l'arrêt. Mais un même mouvement ne peut être à la fois direct et indirect, il y a donc incohérence.

Nous pouvons ajouter qu'une succession de quintes marque non seulement une incohérence, mais signale aussi une incompatibilité périodique, en accusant dans une certaine mesure la périodicité relative au nombre 3.

Ce que nous disons de la quinte s'applique à la quarte, mais avec cette différence que celle-ci contient l'incohérence spéciale qui a été signalée et qui lui donne un caractère particulier.

4° *L'expression simultanée de trois sons espacés entre eux deux à deux de quartes ou de quintes donne lieu à une incohérence. Cela est évident, car dans l'expression simultanée des trois sons, il y a nécessairement une dominante d'un intervalle qui formera en même temps la fondamentale de l'autre.*

5° *Exemple d'une double incohérence* :

(113)

	S	S^1	
	|	|	
F			D
|			|
$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$

Supposons que l'on exprime en premier lieu deux sons simultanés séparés entre eux par l'intervalle $\left(\frac{5}{4}\right)$, et soient S et S^1 ces sons, figure (113). Admettons que l'on prenne le son S pour pivot et que l'on exprime ensuite les deux sons F et D, qui forment la fondamentale et la dominante d'une quinte, sons qui correspondent au dédoublement incohérent signalé au n° 2 du présent paragraphe. Ce fait forme déjà une première cause d'incohérence. La présence du son S^1 qui, sur le pivot S, passe au son D par attraction principale croissante de l'intervalle $\left(\frac{5}{4}\right)$ constitue une seconde incohérence, ou pour mieux dire, une accentuation de la première. C'est qu'en effet le mouvement de S

vers D forme la cadence élidée marquée par la flèche f_1 sur la figure (**107**), cadence qui accentue la contradiction qu'il y a à faire aboutir un son au repos sur la dominante D.

Aucune incohérence ne serait relevée sur le mouvement qui consisterait à passer des sons S_1 et S'_1 de la figure (**114**) aux sons F_1 et D_1.

(**114**)

S'^1 S^1

F_1 D_1

$$\left(\frac{3}{4}\right) \quad \left(\frac{4}{5}\right) \quad \left(\frac{1}{1}\right) \quad \left(\frac{9}{8}\right)$$

C'est qu'en effet, prenant le son S_1 pour pivot, ce son se dédouble pour aboutir aux deux sons F_1 et D_1 suivant un dédoublement indirect qui ne donne pas d'incohérence. Quant au mouvement d'attraction qui entraîne S'_1 vers F_1, suivant l'attraction principale du pivot S_1, c'est encore un mouvement indirect.

Ces quelques explications font bien comprendre le sens qu'il faut attribuer au mot incohérence. Nous ne pouvons entrer quant à présent dans de plus grands développements.

§ 15. — **Les mouvements contraires.**

Avant de quitter le sujet des cadences nous avons le devoir de signaler les mouvements successifs que les sons peuvent effectuer conformément à des cadences successives.

Déjà, en traitant la théorie des trois sons, nous avons fait voir en quelque sorte que les sons, soit en se dédoublant soit en se concentrant, ont une tendance à se mouvoir en sens inverse l'un de l'autre. C'est ce qu'on nomme faire des mouvements contraires. Nous pouvons généraliser cette notion en montrant les mouvements contraires qui s'effectuent naturellement sur l'échelle des cadences ou sur celle des évolutions.

L'échelle des cadences est formée de sons qui, en se déplaçant de l'un à l'autre, de proche en proche, donnent lieu à des cadences élidées ou élidées partielles. Le son préalable est la dominante de l'échelle. C'est le son d'où l'on part pour aboutir à la fondamentale. Considérons la figure (**115**), portons sur une première ligne la dominante *D* et ses répliques, sur une seconde ligne la fonda-

R_3 R_7 D R_9 R_5 R'^3 — Dominante et ses répliques

F R_9 R_5 R_3 R_7 F^1 — Fondamentale et ses répliques

d r m f s l t♭ t d — Echelle des cadences

(**115**)

			s		Dominante
α	(**47**) A I $p = 4$	*f* . .		. . *l*	Dédoublement indirect
β	(**105**) φ, φ¹	*m* . . .		. . . *t*♭	Cadence élidée partielle
γ	(**47**) A P M	*r*		. . . . *t*	Evolution sur la dominante
		— *d* . . . —		— . . . *d* —	Cadence élidée et définitive
γ		*t*		. . . . . . *r*	Evolution sur la dominante
β		*t*♭		. . . . *m*	Cadence élidée partielle
α		*l*		. . . . *f*	Evolution sur la dominante
		— *s* . . . . —		— . . . . *s* —	Evolution définitive
α		*f*		. . . . *l*	Dédoublement direct
		etc.		etc.	

mentale et ses répliques, et enfin sur une troisième ligne l'ensemble des lettres qui représentent les sons de l'échelle des cadences.

Les lignes suivantes donnent successivement la série des deux sons qui, marchant en sens inverse, forment les alternatives d'évolutions et de cadences que nous avons à envisager. Toutes les séries de deux sons considérés,

portent toujours sur le même support réel ; ce support réel est tantôt le son *s*, dominante, ou le son *d* fondamentale. Les cadences successives et les évolutions successives se font donc de *s* à *d* ou de *d* à *s*. Enfin tous les groupements sont compris parmi ceux qui sont donnés à la fin du chapitre III dans les dédoublements en cas de cadence, dans les concentrations en cas d'évolution, ou dans ceux qui résultent des cadences partielles.

Les trois références que nous donnons se reproduisent toujours alternativement dans le sens α β γ ou dans le sens inverse γ β α, et cela indéfiniment en vertu de la périodicité.

Ce que nous avons dit des mouvements contraires avec l'échelle des cadences peut se répéter avec l'échelle des évolutions. La seule différence est que, avec l'échelle des évolutions, ce sont les supports virtuels qui marquent les cadences. Celles-ci ne sont donc pas aussi marquées. Les mouvements de dédoublement et de concentration successifs se font conformément à la figure (**116**), les lettres ayant la signification que leur attribue l'échelle des évolutions.

(**116**)

—— *l* ——
s . . | . . *t*
f♯ . . . | . . . *d*
f . . . . | . . . . *r*
—— *m* . . . —|— . . . *m* ——
r . . . . . . | . . . . . . *f*
d . . . . | . . . . *f*♯
t . . . . | . . . . *s*
—— *l* . . . . —|— . . . . *l* ——
s . . . . | . . . . *t*

La cadence ici se fait du son *m* au son *l*.

Tous ces mouvements successifs se font, cela va sans dire, en vertu des attractions.

La distinction des mouvements indiqués par les figures (**115**) et (**116**) est

l'origine de la détermination des modes, il suffira d'une légère altération dans les mouvements (**116**), pour mieux caractériser la cadence et l'arrêt du son que le support virtuel seul ne peut donner.

Il faut remarquer que dans la série des sons formés par les figures (**115**) et (**116**), on n'aboutit jamais, pour un même groupe, à un intervalle de quinte. Cette remarque est importante pour le contrepoint.

Au contraire, les sons sur lesquels on passe à l'unisson ou à l'octave sont espacés entre eux de quintes ou de quartes, cela résulte du mode suivant lequel les échelles ont été engendrées.

CHAPITRE VIII

Les Accords parfaits

§ 1. — **Groupements de trois sons** (*A P M* et *A P m*).

Nous allons étudier, parmi les groupements de trois sons signalés au chap. III, § 7, ceux qui utilisent les empreintes 3 et 5, combinées avec des multiples de 2. Ce sont les groupements *A P M* et *A P m*, savoir :

$\longleftarrow \cdot \longrightarrow$

(45) *A P M* Intervalles : $\left(\frac{4}{5}\right)$ $\left(\frac{1}{1}\right)$ $\left(\frac{6}{5}\right)$ Nombres : 4 5 6

$\longrightarrow \longleftarrow \cdot$

(47) *A P M* $\left(\frac{3}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{1}\right)$ $\left(\frac{5}{4}\right)$ 3 4 5

$\longleftarrow \cdot \longrightarrow$

(46) *A P m* $\left(\frac{4}{5}\right)$ $\left(\frac{1}{1}\right)$ $\left(\frac{4}{3}\right)$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$

$\longrightarrow \longleftarrow \cdot$

(48) *A P m* $\left(\frac{5}{6}\right)$ $\left(\frac{1}{1}\right)$ $\left(\frac{5}{4}\right)$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{4}$

Ce qu'il y a de particulièrement remarquable dans ces groupements c'est que ils contiennent bien réellement trois sons différents, tandis que les groupements *P* n'en contenaient qu'un seul et les groupements *C* deux. Avec cette série de groupements apparaît donc pour la première fois l'état harmonique correspondant à trois sons distincts. On définit cet état en désignant l'ensemble des trois sons qui le composent sous le nom d'accord parfait.

§ 2. — **Accord parfait majeur, état général, états particuliers.**

Considérons d'abord les groupements *A P M* et prenons l'un d'eux en particulier, le premier par exemple. Nous figurons en *F M D* sur une première

$F \quad M \quad D$

(117) $D_2 \quad F_1 \quad M_1 \quad D_1 \quad F \quad M \quad D \quad F^{\text{I}} \quad M^{\text{I}} \quad D^{\text{I}} \quad F^{\text{II}} \quad M^{\text{II}} \quad D^{\text{II}}$

$D \quad F^{\text{I}} \quad M^{\text{I}}$

$M_1 \quad D_1 \quad F$

ligne les trois sons qui composent le groupement considéré. Ainsi que cela résulte de la figure (**45**) *A P M* reproduite au § 1, les intervalles entre les sons sont les suivants :

— De *F* à *M* : $\left(\frac{5}{4}\right)$ Intervalle original qu'on désignera toujours à l'avenir sous le nom de tierce majeure.

— De *M* à *D* : $\left(\frac{6}{5}\right)$ Intervalle différentiel qu'on désignera toujours à l'avenir sous le nom de tierce mineure.

— De *F* à *D* : $\left(\frac{3}{2}\right)$ Intervalle de cadence, quand il est parcouru en descendant, que nous avons appelé quinte.

On sait que chaque son proprement dit n'est qu'un état particulier d'un son général défini au chap. VI, § 8. Considérons les sons *F*, *M*, *D* dans leur état général. Nous les écrivons sur la seconde ligne de la figure (**117**). Les divers états particuliers de chaque son se trouvent marqués par les mêmes lettres, avec des accents ou des indices. L'ensemble des sons généraux de cette seconde ligne forme ce qu'on nomme l'état général de l'accord, tandis que *F M D* de la première ligne n'en est qu'un état particulier.

On peut constater qu'en prenant trois sons particuliers consécutifs, dans un autre ordre que *F M D*, on trouverait les combinaisons particulières $D\ F^1\ M^1$ de la troisième ligne et $M_1\ D_1\ F$ de la quatrième. Mais ces deux derniers groupements ne sont pas autre chose que ceux qui ont été écrits, en (**47**) *A P M*, d'une part, et en (**101**), chap. VII, § 8 d'autre part.

Les trois groupements (**45**) *A P M*, (**47**) *A P M* et (**101**) ne sont donc que des états particuliers d'un même accord général.

Dans l'exemple que nous avons choisi, tous les sons posent sur un même support réel qui est formé par le son *F*. L'accord parfait qui en résulte se nomme accord parfait majeur.

§ 3. — **Accord parfait mineur, état général, états particuliers.**

Au lieu de partir d'un des groupements *A P M* comme nous l'avons fait au § précédent, nous pouvons partir d'un quelconque des groupements *A P m*. Nous formons une figure (**118**) analogue à la figure (**117**). La première ligne représente le groupement (**46**) *A P m* dont nous sommes parti, la seconde donne l'état général de l'accord, les deux lignes suivantes donnent deux autres états particuliers. Les tierces majeures et mineures sont interverties, et il y a toujours une quinte entre les sons *F* et *D*.

On constate que les deux états particuliers mis en évidence sur la troisième et la quatrième ligne ne sont pas autre chose que les groupements (**102**), chap. VII, § 8, d'une part, et (**48**) *A P m*, d'autre part.

Les trois groupements (**46**) *A P m*, (**48**) *A P m* et (**102**) ne sont donc que trois états particuliers d'un même accord général.

Dans cet exemple, tous les sons posent sur un même support virtuel

qui est formé par le son D. L'accord parfait qui en résulte se nomme accord parfait mineur.

F M D

F_1 M_1 D_1 F M D F^{I} M^{I} D^{I} F^{II} M^{II} D^{II}

(118)

D F^{1} M^{1}

M_1 D_1 F

§ 4. — **Fondamentale, médiante, dominante. — Stabilité et instabilité.**

Les trois sons qui composent les accords parfaits majeurs ou mineurs portent les noms de :

Fondamentale, pour le son F, dans un accord comme dans l'autre ;

Dominante, pour le son D;

Médiante, pour le son M.

On constate sur les figures (**117**) et (**118**) que les groupements de la troisième ligne comportent une concentration sur la fondamentale de l'accord. C'est un état instable. La dominante est alors à la base.

Les groupements de la quatrième ligne comportent un dédoublement à partir de la dominante. C'est un état stable et l'un des deux sons marque son arrêt, en cadence sur la fondamentale.

Enfin les groupements formés par la première ligne divergent de la médiante, pour la figure (**117**), et convergent sur cette médiante pour la figure (**118**). Ces mouvements convergents et divergents s'opèrent en vertu des

empreintes 5, les directions en sont moins accusées que celles qui résultent des cadences. Nous désignons ces états de l'accord sous le nom d'état neutre.

Ainsi, un accord comporte trois états :

1° Etat neutre, fondamentale à la base

F *M* *D*

2° Etat stable, médiante à la base

M *D* *F*

3° Etat instable, dominante à la base

D *F* *M*

§ 5. — **Changements de position.**

Considérant un quelconque des trois états d'un accord, on dit qu'on en change la position quand on reporte le son intermédiaire au-dessus du son élevé, en le montant d'une octave.

Exemple : Etat neutre	*F*	*M*	*D*	
Changement de position	*F*		*D*	M^1

Dans ce changement, le son intermédiaire se trouve implicitement maintenu, puisqu'il forme un son implicite du son M^1 transposé. L'état de stabilité ou d'instabilité ne se trouve donc pas altéré.

Mais si les changements de position ne modifient guère la stabilité ou l'instabilité, ils peuvent modifier l'état de consonnance ; nous en parlerons plus tard, il ne faut pas confondre cette notion avec celle de stabilité.

§ 6. — **Chute et volte. — Chute partielle et élidée.**

L'introduction du nombre 5 parmi les groupements que nous avons étudiés attribue une existence définitive à l'intervalle original primaire $\left(\frac{5}{4}\right)$ que nous avons appelé tierce majeure. Le sens du parcours direct de cette tierce majeure est en descendant $\left(\frac{4}{5}\right)$. Nous disons qu'un son fait une chute quand il parcourt une tierce majeure en descendant. Nous disons de même qu'il fait une volte quand il le parcourt en montant. Les mots chute et volte sont donc l'analogue des mots cadence et évolution, les premiers s'appliquent à l'intervalle de tierce majeure et les seconds aux intervalles de quinte ou de quarte. Il y a une différence essentielle entre les mouvements de chute et de cadence ; ceux-ci peuvent s'effectuer dans les deux sens, aussi bien en montant qu'en descendant, puisqu'il y a la quarte pour former la cadence montante et la quinte pour former la cadence descendante. Les mouvements de chute ne peuvent se faire que dans un seul sens seulement, en descendant. Il n'y a pas lieu de donner des noms spéciaux aux sons qui forment l'intervalle de chute. Nous nous bornerons à dire que le son grave d'une tierce majeure peut être désigné sous le nom de repos de chute et le son élevé sous celui de réplique de chute. Le mouvement de volte va du repos à la réplique, c'est un mouvement indirect.

Dans l'accord majeur, la médiante est la réplique de chute de la fondamentale. Dans l'accord mineur, la médiante est le repos de chute de la dominante.

Lorsque nous avons envisagé l'intervalle de cadence, nous avons été amené à considérer ce que nous avons appelé les cadences partielles, au moyen d'intervalles différentiels primaires en plaçant au dénominateur le facteur 3. Ces intervalles étaient :

$\left(\frac{5}{6}\right)$ en descendant

$\left(\frac{7}{6}\right)$ en montant

On peut essayer de suivre ici le même ordre d'idées. Les intervalles différentiels primaires qui comportent le facteur 5 au dénominateur sont : $\left(\frac{6}{5}\right)$ et $\left(\frac{9}{10}\right)$.

Le premier de ces intervalles ne peut pas être considéré comme donnant lieu, à proprement parler, à une chute partielle, car, pour conserver le chiffre 5 au dénominateur, il faut parcourir l'intervalle en montant, alors que la chute se fait en descendant. L'intervalle $\left(\frac{6}{5}\right)$ doit donc être considéré, à l'égard du chiffre 5, comme un intervalle associé à la tierce majeure pour coopérer aux dédoublements ou aux concentrations (**45**) *A P M* ou (**48**) *A P m*. Cet intervalle $\left(\frac{6}{5}\right)$ a été appelé tierce mineure. A l'égard du nombre 5 il est parcouru directement en montant.

Le second intervalle $\left(\frac{9}{10}\right)$ forme au contraire une véritable chute partielle, puisque le mouvement se fait en descendant.

La chute élidée sera formée par le mouvement d'un son qui sera mu, par des attractions, en prenant pour pivot la réplique de chute. Le son qui donne la chute élidée doit partir d'une réplique de la réplique de chute, pour aboutir par attraction au repos de chute.

Considérons un pivot *P*, figure (**119**), que nous considérons comme la réplique de chute, et mettons en évidence les diverses répliques du pivot, en R_3, R_5, R_7, R_9. Plaçons sur une seconde ligne, en *S*, un son qui figurera le repos de chute, à une tierce majeure au-dessous de *P*.

	R_3	R_7	P	R_9	R_5	R'_3
	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{7}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$
(**119**)	↘ ↙					
	S		P			
	$\left(\frac{4}{5}\right)$		$\left(\frac{1}{1}\right)$			

Quelles sont les répliques du pivot *P* qui peuvent aboutir au son *S* au

moyen d'attractions ? Un simple aperçu permet de voir que ce sont seulement celles qui correspondent aux lettres R_3 et R_7.

Le son R_3 forme avec le pivot l'intervalle $\left(\frac{3}{4}\right)$. L'attraction principale décroissante de cet intervalle donne :

$$\left(\frac{3+1}{4+1}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) \qquad \text{mouvement} \qquad \left(\frac{16}{15}\right)$$

Le son R_7 forme avec le pivot l'intervalle $\left(\frac{7}{8}\right)$ qui peut passer à $\left(\frac{4}{5}\right)$ conformément au calcul suivant :

$$\left(\frac{7-3}{8-3}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) \qquad \text{mouvement} \qquad \left(\frac{32}{35}\right)$$

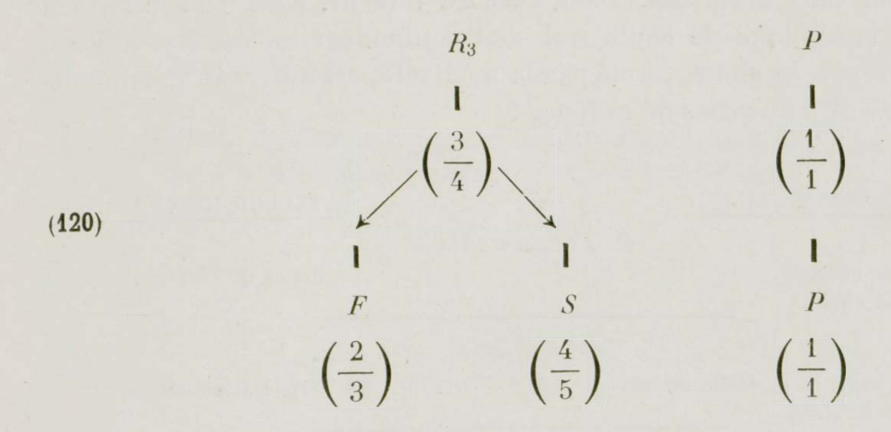
Nous pouvons considérer, en vertu du pivot P, que les sons R_3 et R_7, séparés entre eux par l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$, effectuent un mouvement de concentration sur le repos de chute S. Cette concentration remplacera celle qui, dans le tableau (**48**) prolongé, aurait été donnée par la série des nombres

$$\left(\frac{1}{14}\right) \quad \left(\frac{1}{13}\right) \quad \left(\frac{1}{12}\right)$$

série qu'on n'a pu utiliser puisqu'il y figure le nombre 13 qui doit être exclu.

Ici se place une observation importante: Nous avons déjà considéré la concentration de deux sons séparés par un intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$, au chapitre VII, § 11. Dans ce cas la concentration se faisait, non pas comme ici sur le repos de chute du pivot, mais sur le son marquant cadence partielle du pivot. La concentration du chapitre VII § 11 marquait donc une cadence, tandis qu'ici elle marque une chute. Cette distinction entre les deux cas a une importance extrême, ce sera une des caractéristiques les plus importantes des modes.

On peut associer les mouvements de chute élidée à ceux de cadence élidée, de la manière suivante :

(120) 

Soit un pivot P et sa réplique R_3, sur une première ligne de la figure (**120**). Plaçons sur une seconde ligne le repos de chute du pivot P, soit S ce repos. Marquons en F le son fondamental d'une cadence dont P serait la dominante ; le son R_3 passe à F en vertu d'une cadence élidée, il passe à S en vertu d'une chute élidée ; le son R_3 se dédouble donc pour former l'intervalle $\left(\frac{6}{5}\right)$ entre les sons F et S.

Le son monte de $\left(\frac{16}{15}\right)$ et descend de $\left(\frac{8}{9}\right)$. Ce dédoublement remplace celui qui résulterait du tableau (**45**) prolongé jusqu'aux nombres :

10, 11, 12

nombres qu'on ne peut utiliser à cause de la présence de 11 qui doit être exclu.

Cette concentration, qui marque à la fois une cadence et une chute partielles, sera caractéristique du mode mineur.

§ 7. — Caractères distinctifs des accords majeurs et mineurs.

Les accords parfaits majeurs et mineurs sont caractérisés par la position des intervalles originaux qui les composent. Ils comprennent tous deux l'intervalle de cadence et l'intervalle de chute. Dans l'accord majeur, le repos de

chute et le repos de cadence se confondent en un son unique sur la fondamentale ; la dominante et la réplique de chute formée par la médiante, sont constituées par deux sons différents. Dans l'accord mineur, c'est au contraire la dominante et la réplique de chute qui sont confondues en un son unique, tandis que le repos de chute, formé par la médiante, est différent de la fondamentale, c'est-à-dire du repos de cadence :

ACCORD MAJEUR		ACCORD MINEUR
— Repos de cadence. — Repos de chute.	*1° Fondamentale*	— Repos de cadence.
— Son de cadence partielle ou réplique de chute.	*2° Médiante*	— Repos de chute.
— Réplique de cadence.	*3° Dominante*	— Réplique de cadence. — Réplique de chute.

(121)

Formation capitale des sons

D	*F*	*M*		*M*	*D*	*F*
$\left(\frac{3}{4}\right)$ →	$\left(\frac{1}{1}\right)$	← $\left(\frac{5}{4}\right)$		$\left(\frac{4}{5}\right)$ ←	$\left(\frac{1}{1}\right)$	→ $\left(\frac{4}{3}\right)$

L'accord majeur est surtout un accord de concentration sur la fondamentale.

L'accord mineur est surtout un accord de dédoublement à partir de la dominante.

Formations secondaires

M	*D*	*F*		*D*	*F*	*M*
$\left(\frac{5}{6}\right)$ ←	$\left(\frac{1}{1}\right)$	→ $\left(\frac{4}{3}\right)$		$\left(\frac{3}{4}\right)$ →	$\left(\frac{1}{1}\right)$	← $\left(\frac{6}{5}\right)$

Accessoirement l'accord majeur est un dédoublement à partir de la dominante, en vertu de la cadence partielle.

Accessoirement l'accord mineur est une concentration sur la fondamentale en vertu de la cadence élidée.

Formation neutre

Dédoublement sur la médiante (peu accentué).

Concentration sur la médiante (peu accentuée).

Nous donnons dans le tableau comparatif ci-dessus les différences essentielles qui caractérisent et distinguent les deux accords parfaits.

§ 8. — Sillons qui résultent des mouvements des accords, ou formation de l'échelle diatonique. — Comma mineur.

(122)

1° d_I m_I s_I d m s d^I m^I s^I d^{II} m^{II}

2° d_I m_I l_I d m l d^I m^I l^I d^{II} m^{II}

3° m_I s_I t m s t^I m^I s^I t^{II} m^{II}

4° d_I f_I l_I d f l d^I f^I l^I d^{II}

5° r_I s_I t r s t_I r^I s^I t^{II} r^{II}

6° d_I r_I m_I f_I s_I l_I t_I d r m f s l t d^I r^I m^I f^I s^I l^I t^I d^{II} r^{II} m^{II}

Considérons, sur une première ligne de la figure (**122**) un accord parfait majeur, dans une position quelconque. Nous prenons la position neutre *d m s*, pour fixer les idées. Nous reproduisons sur la même ligne et aux divers octaves les trois sons donnés, de manière à constituer l'accord général.

Concentrons les trois sons *d m s* sur la médiante *m*, par concentration indirecte. Prenons cette médiante comme dominante d'un nouvel accord parfait et opérons le dédoublement direct. Ce dédoublement conduit au son *l*, sur la deuxième ligne, en montant d'une quarte ; en descendant le son doit parcourir une tierce soit majeure, soit mineure, il aura tout naturellement tendance à revenir sur le son *d* dont les sillons ont été creusés par les empreintes du

premier accord, dont on a gardé le souvenir. Ce mouvement de l'accord a donc fixé la position du son l à une quarte au-dessus de m.

Concentrons encore les trois sons $d\ m\ s$ de la première ligne toujours sur le son m, mais opérons, non plus le dédoublement direct, mais le dédoublement indirect. Le son descendant définit un son t à une quarte au-dessous de m. Quant au son supérieur, il doit monter d'une tierce. Les sillons résultant du son s font qu'il revient sur ce son s. Nous obtenons ainsi un son t sur la troisième ligne.

Concentrons les trois sons $s_1\ d\ m$ du premier accord sur le son d par concentration directe, puis dédoublons par dédoublement direct. Le son supérieur monte d'une quarte, en f, sur la quatrième ligne. Quant au son inférieur, il s'arrête en l_1, sur les sillons creusés par le son l.

Concentrons enfin les trois sons $m\ s\ d^1$ du premier accord sur le son s, par concentration indirecte, puis dédoublons par dédoublement indirect. Nous créons ainsi un nouveau son r, à une quarte au-dessous de s, quant au son montant, il s'arrête en t^1 sur les sillons antérieurement creusés par le son t.

Résumons enfin sur une sixième ligne l'ensemble des sons obtenus, nous obtenons une série de sons qui forment ce que l'on appelle l'échelle diatonique. Cette échelle, ainsi que cela résulte de son mode de formation, est celle qui convient aux mouvements d'un accord parfait majeur.

Au lieu de partir d'un accord majeur, on peut partir d'un accord mineur, comme nous l'indiquons rapidement sur la figure (**123**) :

			l		d		m		
			l		d			f	
		s			d		m		
(**123**)	f_1		l			r			
				t			m		s^1
	f_1	s	l	t	d	r	m	f	s^1

Nous partons de l'accord mineur $l\ d\ m$ et nous arrivons à former une nouvelle échelle diatonique.

On constate que les deux échelles diatoniques ainsi formées sont identiques. Seuls les sons marqués r sur l'une et sur l'autre sont un peu différents.

Le r de la figure (**122**) est à une quarte au-dessous de s et par suite à $\left(\frac{9}{8}\right)$ au-dessus de d. Le son r de la figure (**123**) est à une quarte au-dessus de l, et par suite à $\left(\frac{10}{9}\right)$ au-dessus de d. Les deux sons r diffèrent donc de :

$$\left(\frac{9}{8}\right) - \left(\frac{10}{9}\right) = \left(\frac{81}{80}\right)$$

Cette petite différence forme ce qu'on nomme le comma mineur.

§ 9. — Comparaison de l'échelle diatonique avec les échelles des cadences et des évolutions. — Comma majeur.

Il est facile de repérer au son d tous les intervalles de l'échelle diatonique, c'est ce que nous faisons sur une première ligne de la figure (**124**) :

(**124**)

	d	r	m	f		s	l		t	d
Echelle diatonique	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$ ou $\left(\frac{10}{9}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$		$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{3}\right)$		$\left(\frac{15}{8}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$

	d	r	m	f	s	l	$t\flat$	t	d
Echelle des cadences	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{21}{16}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{27}{16}\right)$	$\left(\frac{7}{4}\right)$	$\left(\frac{15}{8}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$

	d	r	m	f	$f\sharp$	s	l	t	d
Echelle des évolutions	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{10}{9}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{10}{7}\right)$	$\left(\frac{40}{27}\right)$	$\left(\frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{40}{21}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$

Nous reproduisons également les sons des échelles des cadences et des évolutions, sur une seconde et sur une troisième ligne, en cotant tous les sons

à partir du son *d* (les cotes résultent facilement de celles qui ont été données aux § 12 et 13 du chapitre VII).

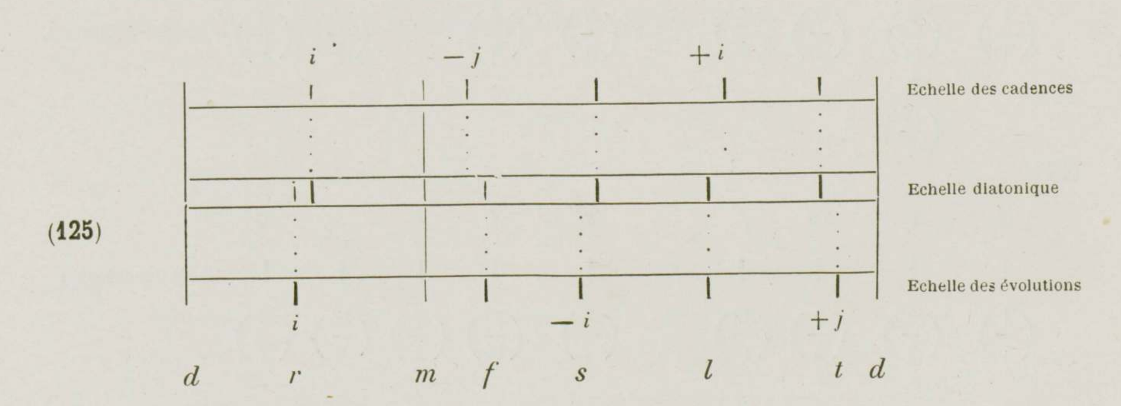
Les sons *d* et *m* sont communs à toutes les échelles. Les deux positions du son *r*, dans l'échelle diatonique, correspondent : la plus élevée à l'échelle des cadences et la moins élevée à l'échelle des évolutions. Le son *f* de l'échelle diatonique est le même que celui des évolutions : sur l'échelle des cadences, ce son *f* est abaissé de :

$$\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{21}{16}\right) = \left(\frac{64}{63}\right)$$

Ce petit intervalle forme ce que nous appelons le comma majeur. Le son *l* occupe la même position dans l'échelle diatonique et dans l'échelle des évolutions. Sa position est plus élevée de un comma mineur, dans l'échelle des cadences. Quant au son *t* il est le même sur l'échelle diatonique et sur l'échelle des cadences, il est plus élevé de un comma majeur sur l'échelle des évolutions.

Nous remarquons enfin que les sons $t_\flat$ de l'échelle des cadences et $f_\sharp$ de l'échelle des évolutions n'ont pas de correspondant dans l'échelle diatonique.

Nous donnons un schéma spécial qui permet de repérer les positions relatives des sons des trois échelles, figure (**125**). Nous représentons le comma mineur par *i* et le comma majeur par *j*.



On verra, par la théorie de la consonnance, qu'en fait les sons de ces trois échelles, quoique différents et ayant des significations totalement distinctes, peuvent être confondus suivant certaines conditions que nous envisagerons. On les appelle :

do ré mi fa sol la si do

§ 10. — Accords de septième de dominante et de septième de sensible.

Nous avons terminé, avec ce qui précède, tout ce que nous voulons tirer des accords parfaits, quant à présent. Il conviendrait, pour continuer l'étude commencée, d'aborder les groupements de trois sons qui suivent ceux que nous avons considérés jusqu'ici. Mais, au fur et à mesure que nous avançons dans la série des trois sons, les intervalles se resserrent. De ce rapprochement naît une certaine confusion, dont l'étude fera l'objet des chapitres suivants, sous le nom de consonnance et dissonnance.

Toutefois, il est utile, immédiatement avant, de considérer les groupements de trois sons qui utilisent le nombre 7, sans considérer le nombre 9. Ces groupements sont ceux du § 7 chap. III qui sont renseignés par les signes $(A\ I)\ p = 3$.

Considérons d'abord, parmi ces groupements, ceux qui comprennent le parcours de l'intervalle original $\left(\frac{8}{7}\right)$, dont le sens direct est en montant, savoir :

$$\text{(45)}\quad A\,I\,p = 3 \quad \text{Intervalles :} \quad \left(\frac{6}{7}\right) \overleftarrow{\quad} \left(\frac{1}{1}\right) \overrightarrow{\quad} \left(\frac{8}{7}\right) \quad \text{Nombres :} \quad 6 \quad 7 \quad 8$$

$$\text{(48)}\quad A\,I\,p = 3 \quad \left(\frac{7}{8}\right) \underrightarrow{\quad} \left(\frac{1}{1}\right) \underleftarrow{\quad} \left(\frac{7}{6}\right) \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{6}$$

On voit que, à l'égard du nombre 7, l'intervalle différentiel $\left(\frac{6}{7}\right)$ se parcourt directement en descendant, tandis que, avec les cadences, à l'égard du nombre 3, il se parcourait en montant. Cet intervalle $\left(\frac{6}{7}\right)$ joue donc relativement à l'intervalle original $\left(\frac{8}{7}\right)$ un rôle analogue à celui de l'intervalle $\left(\frac{6}{5}\right)$ à l'égard de la tierce majeure $\left(\frac{4}{5}\right)$.

Ces deux groupements engendrent deux accords importants qu'on désigne sous les noms d'accords de septième de dominante et de septième de sensible.

Considérons, sur l'échelle de cadences, figure (**110**) chap. VII § 12 les

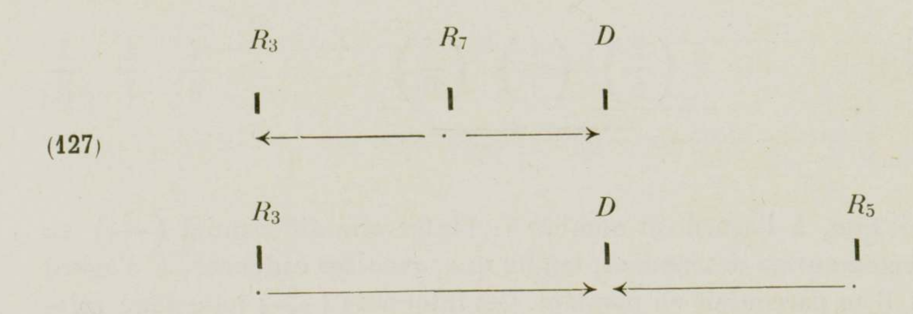
trois sons R_3, R_7 et D de la première ligne. Au lieu de repérer les sons sur le son D, repérons-les sur le son R_7, nous trouvons :

(**126**)

$$\begin{matrix} R_3 & & R_7 & D \\ \mid & & \mid & \mid \\ \left(\frac{6}{7}\right) & & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{8}{7}\right) \\ \longleftarrow & \cdots & \cdot & \longrightarrow \end{matrix}$$

C'est la disposition de (**45**) $A\ I\ p = 3$. Il s'agit d'un dédoublement qui commence par l'expression du son R_7 et qui aboutit à D sur la fondamentale de l'intervalle de quarte qui va de R_3 à D. En effet, le son R_7 se dédouble en deux : R_3 et D ; puis R_3 tombe en cadence sur D, si bien que le tout se résoud finalement sur D. Mais la figure (**126**) n'opère que sur les nombres 3 et 7, nous ne pouvons négliger l'existence des empreintes d'ordre 5, car elles sont plus rapprochées que la septième. Associons donc le groupement (**126**) à un autre qui utilise l'empreinte 5, en la choisissant de telle sorte, pour ne pas avoir d'incohérence, qu'il aboutisse à une convergence finale des sons sur D. Il suffit pour cela de reprendre la première ligne de la figure (**110**) et de prendre les trois sons R_3, D et R_5 qui forment un groupement convergent sur D qui répond à la question (c'est le groupement (**47**) $A\ P\ M$). L'association des deux groupements donne :

(**127**)



L'ensemble des sons ainsi formés constitue ce qu'on appelle l'accord de septième de dominante. Ce que nous avons dit fait voir clairement la cohésion qu'il y a dans tous les mouvements. Cet accord débute par l'expression du son R_7, continue par celle de l'accord parfait majeur R_3, D, R_5 et finalement se termine par le son unique D vers lequel tout converge.

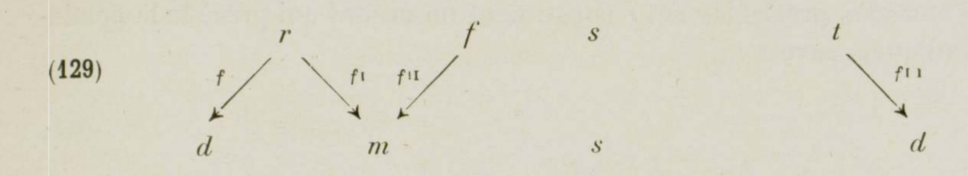
Reportons-nous encore une fois à la figure (**110**). On voit que les sons qui composent la figure (**127**) portent, sur la dernière ligne, les désignations

(**128**)	*r*	*f*	*s*	*t*
	ré	*fa*	*sol*	*si*

Le son *fa* qu'on exprime le premier et qui est étranger à l'accord parfait se nomme son dissonnant. Le son *sol* auquel on aboutit est la fondamentale de l'accord, fondamental sol qui est la dominante *D* de l'échelle des cadences (**110**).

Cet accord, si on continuait le mouvement indiqué à l'échelle des cadences, aboutirait en cadence sur l'accord parfait de *do*, savoir :

(**129**)



Les flèches f et f^{III} caractérisent, figure (**129**), les cadences élidées ; f^{I} et f^{II} caractérisent les cadences partielles.

Nous avons signalé par les flèches φ et φ^{I} le dédoublement correspondant aux cadences partielles, figure (**105**) § 8 chap. VII.

Ce dédoublement sur l'échelle des cadences se porte sur les sons indiqués à la figure (**130**).

(**130**)

$$\longleftarrow \cdot \longrightarrow$$

$$t \qquad r \qquad f$$

$$\left(\frac{5}{6}\right) \qquad \left(\frac{1}{1}\right) \qquad \left(\frac{7}{6}\right)$$

Le support réel commun est le son *s* de l'échelle, on peut l'exprimer et il vient :

(**131**) *s* *t* *r* *f*

accord qui est formé des mêmes sons que celui de la figure (**128**).

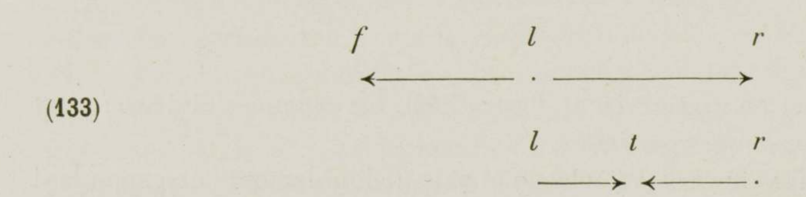
Nous pouvons considérer de la même manière le groupement (**48**) *A l* $p = 3$ et le poser non plus sur l'échelle des cadences, mais sur celle des évolutions, nous trouvons les sons suivants :

(**132**)

$$\begin{array}{ccc} l & t & r \\ \longrightarrow & \longleftarrow & \\ \left(\frac{7}{8}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{7}{6}\right) \end{array}$$

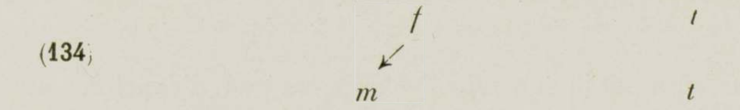
Par des considérations analogues à celles que nous avons données à propos de la figure (**127**), nous pouvons accompagner ce groupement du son *f* qui, uni aux sons préalables *l* et *r* constituent un accord qui précède la combinaison indiquée, savoir :

(**133**)



Le son préalable est le son *l*, dominante de l'accord préalable et le son fondamental est celui auquel on aboutit, c'est-à-dire *t*. Mais il se présente cette particularité que le son *fa* subsiste en présence du son fondamental *t*. L'arrêt du mouvement n'est pas complet : Le son fondamental *t* sert de pivot et une

(**134**)



simple attraction conduit le *f* sur le son de cadence *mi*. Comme le son *t* lui-même se résoud en cadence sur *mi*, c'est sur ce son *mi* que finalement tout converge. Nous utiliserons ultérieurement ces mouvements. Pour le moment,

nous nous bornons à dire que l'ensemble des sons (133) forme ce que l'on nomme l'accord de septième de sensible.

(135)
$$\begin{matrix} f & l & t & r \\ \left(\frac{7}{10}\right) & \left(\frac{7}{8}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{7}{6}\right) \end{matrix}$$

Les sons portent tous sur le support virtuel *la*, c'est-à-dire sur le son préalable à tous les autres, et qui, par conséquent, doit être exprimé d'abord.

Des considérations analogues à celles que nous avons données pour l'accord de septième de dominante présenteraient cet accord sous la forme

(136)
$$\begin{matrix} t & r & f & l \\ \left(\frac{4}{7}\right) & \left(\frac{2}{3}\right) & \left(\frac{4}{5}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) \end{matrix}$$

En terminant, nous rappellerons enfin que les trois sons :

$$t \qquad r \qquad f$$

considérés comme appartenant à l'échelle des cadences donnent les intervalles :

$$\left(\frac{5}{6}\right) \quad \left(\frac{1}{1}\right) \quad \left(\frac{7}{6}\right)$$

Considérés comme appartenant à l'échelle des évolutions :

$$\left(\frac{6}{7}\right) \quad \left(\frac{1}{1}\right) \quad \left(\frac{6}{5}\right)$$

Nous ferons remarquer que, considérés en eux-mêmes, ils peuvent être envisagés, conformément à la remarque du § 8 chap. VII, comme pouvant donner lieu à des groupements dans lesquels les sons marchent directement en sens inverse des cadences. Ils résultent alors des groupements (**46**) $A\ I\ p = 3$ et (**47**) $A\ I\ p = 3$. L'accord des trois sons $t\ r\ f$ présente donc à ces divers points de vue une grande ambiguïté qu'il est bon de retenir dès maintenant.

CHAPITRE IX

L'Adaptation

§ 1. — **Facultés d'adaptation**.

Les sons se perçoivent au moyen des empreintes. Pour qu'une empreinte d'ordre N puisse se manifester, il faut deux conditions, savoir : La corde correspondante de l'oreille doit pouvoir vibrer en se subdivisant en N parties aliquotes ; de plus, l'état d'équilibre dû à ce mouvement vibratoire naturel doit pouvoir être ressenti par notre sensibilité.

L'état d'équilibre dans le mouvement vibratoire des cordes de l'oreille se constate non seulement aux empreintes, mais encore, de part et d'autre, dans une zone d'équilibre qui présente une étendue déterminée, la même pour toutes les empreintes (chap. I, § 15). Si les empreintes d'un son constituent des points précis parmi les cordes de l'oreille, il n'en est pas de même de la limite des zones d'équilibre. Le trouble qui se manifeste dans le mouvement vibratoire des cordes, à mesure qu'on s'éloigne d'une empreinte, varie d'une manière continue, la limite de la zone d'équilibre n'apparaît que quand notre sensibilité se refuse à admettre le mouvement vibratoire comme quasi équilibré. Cette limite dépend par conséquent d'une certaine accommodation à laquelle se font nos sens en vertu de l'habitude.

L'objet de ce chapitre est de voir comment notre sensibilité s'est adaptée aux circonstances de la musique telles que nous les avons exposées jusqu'ici. Il résultera de cette adaptation les faits de consonnance et de dissonnance que nous étudierons au chapitre suivant.

Il est clair que l'adaptation de la sensibilité peut se faire sur d'autres bases que celles qui résultent de la théorie des trois sons. C'est ce qui différencie la musique chez les divers peuples. Nous n'abordons ici, bien entendu, que ce qui concerne les combinaisons de sons en usage chez les peuples civilisés. Ces combinaisons sont les plus générales qu'il soit possible d'admettre ; en habituant nos sens à s'y adapter, nous leur rendons plus difficile l'intelligence de combinaisons musicales plus simples et plus limitées, qui n'ont pas demandé une si grande latitude d'adaptation ; il nous faut alors faire quelque effort pour les comprendre, en rétrogradant en quelque sorte sur cette latitude.

§ 2. — **Faculté** *H*.

Nous désignons sous le nom de faculté *H* celle en vertu de laquelle notre sensibilité perçoit l'état d'équilibre dans le mouvement naturel d'une corde de l'oreille qui vibre en se subdivisant en un nombre de parties aliquotes de plus en plus élevé. Cette faculté a nécessairement une limite.

Au fur et à mesure que la corde des empreintes élevées se subdivise en tronçons de plus en plus nombreux, pour correspondre à la vibration du son émis, il arrive que le mouvement vibratoire devient trop faible pour impressionner nos sens. Les empreintes correspondantes ne se manifestent donc plus à notre sensibilité

§ 3. — **Empreintes directes** - **Additionnelles** — **Douteuses**.

Considérons les diverses empreintes d'un son. Parmi ces empreintes, les unes correspondent à un état d'équilibre assez manifeste pour être constaté directement par nos sens. Ce sont les empreintes directes. Si le nombre n est le numéro d'ordre de la dernière empreinte directe, toutes les empreintes de la série 1, 2, 3, etc.... n seront perçus directement.

Les empreintes d'un son au-dessus de la $n^{\text{ième}}$ ne sont pas perçus directement par nos sens. Admettons qu'on émette un deuxième son, en même temps que le premier et plus grave. Le support réel de l'intervalle donnera les empreintes communes aux deux sons ; le deuxième son étant plus grave, il pourra

y avoir, parmi les empreintes communes, des empreintes directes du second son sur des empreintes du premier qui ne se manifestent pas directement. Nous désignons ces empreintes du premier son supérieures à la n^e sous le nom d'empreintes additionnelles.

L'existence des empreintes additionnelles est corrélative de l'intuition développée au chap. VI, § 3. Nos sens ne prennent pas la notion d'une empreinte isolée, nos sensations correspondent à des systèmes d'empreintes formant un son. C'est ainsi que nous séparons intuitivement et nécessairement les divers sons implicites qui composent un son donné. Il résulte de ces explications que, lorsqu'on indique la perception de n empreintes directes, c'est comme si l'on disait la notion de n sons implicites.

Il résulte avec évidence de ce qui précède que les empreintes additionnelles ne sont pas autre chose que celles des empreintes directes des divers sons implicites qui posent sur les empreintes du son au delà de la $n^{ième}$.

(137)

25	24	20	18	16	15	12	10	9	8	6	5	4	3	2	1	0	
																	Son donné
	12	10	9	8		6	5		4	3		2		1		0	Son implicite 1/2
	8		6		5	4		3		2			1			0	id. 1/3
	6	5		4		3			2			1				0	id. 1/4
5		4			3		2				1					0	id. 1/5

Supposons que, en raison de la faculté H, nous puissions discerner directement les cinq premières empreintes d'un son quelconque. Nous marquons ces cinq empreintes sur la première ligne de la figure (**137**) ; ce sont les empreintes directes. Sur une seconde ligne, nous marquons les empreintes directes du son implicite 1/2, sur une troisième, celles du son implicite 1/3 et ainsi de suite jusqu'au cinquième son implicite. Nous nous arrêtons là, puisqu'au-delà les sons implicites ne comprendraient plus aucune empreinte directe du premier son. Nous reportons sur la première ligne, en traits ponc-

tués celles des empreintes des sons implicites ainsi considérés qui dépassent la $n^{ième}$ empreinte du son donné. Ce sont les empreintes additionnelles, savoir :

8 9 10 . 12 . . 15 16 . . . 20 25

Si on considère les empreintes additionnelles des divers sons implicites que nous avons envisagés, il sera possible de leur assigner leur place et de les marquer par des petits traits de peu d'importance. En reportant ces empreintes sur celles du son donné, on constate qu'elles permettent de signaler de nouvelles empreintes du son émis, savoir :

. . 18 24

Nous les désignons sous le nom d'empreintes douteuses.

Les empreintes douteuses ne créent qu'un intervalle primaire de plus que les empreintes additionnelles, c'est l'intervalle $\left(\frac{25}{24}\right)$. Cet intervalle qui n'est pas contenu dans l'échelle diatonique sera appelé intervalle chromatique. Tous les autres intervalles primaires indiqués sur la figure (**137**) sont définis par des empreintes directes ou additionnelles. Ils sont tous contenus dans l'échelle diatonique, ce sont les intervalles diatoniques.

§ 4. — **Faculté** *Z*. — **Empreintes personnelles.**

La faculté *Z* est celle qui nous permet d'admettre une quasi-coïncidence de deux empreintes différentes des deux sons, quand l'une de ces empreintes tombe dans la zone d'équilibre de l'autre.

Nous désignons par λ l'intervalle sur lequel s'étend la zone d'équilibre, de part et d'autre d'une empreinte. On sait que la valeur de λ est la même pour toutes les empreintes, quel que soit leur ordre.

On se souvient que, pour représenter les empreintes de deux sons formant un intervalle, il nous a suffi de considérer ce que nous avons appelé un compartiment, chap. II, § 3. Les empreintes du premier compartiment jouent un rôle capital dans la détermination des intervalles, c'est pourquoi nous les appelons empreintes personnelles de l'intervalle.

Pour se rendre compte du rôle que jouent les empreintes personnelles

d'un intervalle, nous allons examiner ce qui se passe lorsque la confusion se produit parmi les empreintes personnelles. Considérons donc deux sons formant entre eux l'intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, et passons en revue toutes les fenêtres du premier compartiment, c'est-à-dire celles dont le numéro d'ordre est moindre que q. Ces fenêtres forment, pour l'un des deux sons, les empreintes personnelles de l'intervalle donné. Admettons qu'une de ces fenêtres, celle d'ordre Q, tombe dans la zone d'équilibre de l'empreinte P de l'autre son. La faculté Z nous permettra de prendre l'intervalle donné $\left(\frac{p}{q}\right)$ pour l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$.

Parmi les intervalles, tels que $\left(\frac{P}{Q}\right)$, qui peuvent être confondus avec $\left(\frac{p}{q}\right)$ en raison de la faculté Z, il en est un qui est formé avec les plus petites valeurs de P et Q. Toutes les fenêtres moindres que Q sont alors distinctes des empreintes moindres que P, sans qu'aucune d'elles pénètre dans la zone d'équilibre des autres ; ce sont en quelque sorte les empreintes personnelles de l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$. L'existence distincte des empreintes de cet intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$ fera que nous tendrons tout naturellement à confondre l'intervalle donné $\left(\frac{p}{q}\right)$ avec l'intervalle $\left(\frac{P}{Q}\right)$ en prenant le second à la place du premier.

Lorsqu'on donne un intervalle, il est aisé de trouver celles des empreintes personnelles de l'un des sons qui pénètrent dans la zone d'équilibre des empreintes de l'autre. Il suffit de se reporter à la formule qui a été donnée au chapitre II, § 5, savoir :

$$\frac{Q\,p}{q} = P \text{ à une demi-unité près.} \tag{138}$$

Connaissant un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$ et une fenêtre Q, la valeur obtenue P, à une demi-unité près, correspond à l'empreinte du son qui est la plus voisine de la fenêtre donnée. La distance qui les sépare est la différence des intervalles

$$\left(\frac{p}{q}\right) - \left(\frac{P}{Q}\right) = \left(\frac{p\,Q}{P\,q}\right) \tag{139}$$

On essaie successivement toutes les valeurs de Q moindres que q ; si on trouve partout des valeurs supérieures à λ en valeur absolue, l'intervalle est bien défini par ses empreintes personnelles. S'il arrive que, pour une ou plusieurs valeurs de Q, on trouve que la différence (**139**) est moindre que λ, l'intervalle est mal déterminé, il peut donner lieu à des confusions.

§ 5. — Limite du nombre des empreintes distinctes d'un son donné.

L'intervalle entre deux empreintes consécutives d'un même son va en se resserrant indéfiniment, à mesure que le numéro d'ordre des empreintes augmente. On voit en effet que cet intervalle est égal à $\left(\frac{p+1}{p}\right)$ qui tend vers $\left(\frac{1}{1}\right)$, c'est-à-dire O, quand p tend vers l'infini.

La zone d'équilibre est au contraire constante, et s'étend de part et d'autre de chaque empreinte à un intervalle λ. A mesure qu'on envisage des empreintes de plus en plus élevées, on conçoit qu'il arrive nécessairement qu'entre deux empreintes consécutives il ne subsiste aucune zone de trouble ; ces empreintes cessent donc d'être distinctes. Supposons que cette confusion se produise entre les empreintes p et $p+1$, mais sans exister entre les empreintes précédentes, $p - 1$ et p, conformément au schéma (**140**).

(**140**) $p+1$ | < — λ —> | < — λ —> | p | < — λ —> | | < — λ —> | $p-1$

On aura
$$\left(\frac{p+1}{p}\right) < 2\lambda < \frac{p}{p-1}$$

Posons $\lambda = \left(\frac{m}{n}\right)$ on aura $2\lambda = \left(\frac{m^2}{n^2}\right)$ cela entraîne

(**141**)
$$p < \frac{m^2}{m^2 - n^2} \quad \text{et} \quad p > \frac{n^2}{m^2 - n^2}$$

Exemples : — 1° pour $\lambda = \left(\frac{81}{80}\right)$ on trouve

$p < 41$ avec $p > 39$

La dernière empreinte distincte est donc la quarantième.

2° pour $\lambda = \left(\frac{64}{63}\right)$ on trouverait la trente-deuxième ;

3° pour $\lambda = \left(\frac{36}{35}\right)$ on trouverait la dix-huitième ;

4° pour $\lambda = \left(\frac{128}{125}\right)$ on trouverait la vingt-et-unième.

§ 6. — **Marche progressive de la faculté** *H*.

Pour se faire une idée de l'adaptation de notre sensibilité aux perceptions musicales, nous allons supposer le développement progressif de degré en degré de la faculté *H* et nous examinerons ensuite les conséquences à tirer des observations que nous serons conduit à formuler.

Supposons donc d'abord que la faculté *H* soit absolument rudimentaire et admettons que nous ne puissions ressentir que la première empreinte de chaque son. Nous pouvons à la rigueur sentir qu'un son se déplace, mais nous ne disposons d'aucun moyen pour apprécier les intervalles. Nous ne pouvons constater que l'unisson, lorsque les empreintes de deux sons coïncident.

Si nos organes, en se perfectionnant peu à peu, permettent d'accroître la faculté *H* jusqu'à prendre directement la notion des deux premières empreintes, il nous est donné en même temps le pouvoir de connaître intuitivement l'empreinte additionnelle 4. Nous pouvons alors concevoir l'intervalle d'octave. C'est la naissance de la notion rudimentaire de périodicité, sans rien de plus.

Supposons que nos sens, se perfectionnant toujours davantage, arrivent à connaître directement l'empreinte 3.

(**141**)

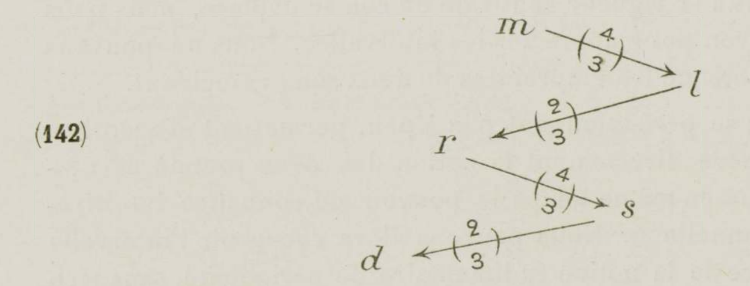
Son donné	9	8	6	4	3	2	1	0
Son implicite 1/2		4	3	2		1		0
Son implicite 1/3	3		2		1			0

la figure (**141**), analogue à la figure (**137**) du § 3, montre que nous prenons la notion des empreintes additionnelles 4, 6, 9, et de l'empreinte douteuse 8. La série des empreintes ainsi obtenue permet d'acquérir la notion des mouvements de cadence. Pour en arriver là, il a fallu que nos sens se perfectionnent directement et sans aucun secours, jusqu'à connaître l'empreinte 3.

Nos sens étant ainsi perfectionnés et en possession du mouvement de cadence, il nous est possible de faire mouvoir un son de la manière suivante :

1° Une montée de $\left(\frac{4}{3}\right)$ de *m* à *l*, figure (**142**) ;
2° Une descente de $\left(\frac{2}{3}\right)$ de *l* à *r* ;
3° Une montée de $\left(\frac{4}{3}\right)$ de *r* à *s* ;
4° Une descente de $\left(\frac{2}{3}\right)$ de *s* à *d*.

(**142**)



Calculons l'intervalle qui sépare les sons extrêmes *m* et *d*. Il suffit de faire la somme algébrique des intervalles parcourus :

$$\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{64}{81}\right)$$

L'intervalle obtenu peut se décomposer en deux parties de la manière suivante :

$$\left(\frac{64}{81}\right) = \left(\frac{64}{80}\right) + \left(\frac{80}{81}\right) = \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{80}{81}\right)$$

La valeur absolue de l'intervalle parcouru est donc :

$$\left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{81}{80}\right)$$

c'est-à-dire une tierce majeure augmentée du comma mineur *i*. Dans ce mouvement, l'empreinte 4 du son *d*, empreinte qui est connue, signale l'empreinte 5

du son m, mais avec une erreur du comma mineur i. Nos organes s'accommodent de cette erreur en raison de la faculté Z. Ils prennent la notion de la cinquième empreinte, mais à la condition de tolérer pour la zone d'équilibre, de part et d'autre de chaque empreinte, un intervalle

$$\lambda = \left(\frac{81}{80}\right) = i$$

On constate cette tolérance de notre sensibilité expérimentalement en reproduisant plusieurs fois de suite le parcours du circuit indiqué par le schéma (**143**).

(**143**)

Quand, après être parti de m on aboutit à m^1 (le dernier son est à un comma mineur au-dessous de m), on reprend le même mouvement plusieurs fois de suite, en partant de m^1, puis du dernier son du second circuit, et ainsi de suite, on devrait chaque fois constater un abaissement du son du comma i. Après plusieurs parcours, la descente du son devrait être appréciable ; or, on remarque au contraire qu'il n'en est rien, le souvenir du premier son m domine l'erreur, il en résulte que notre faculté z s'en est accommodée (1).

(1) Cela ne signifie pas que nos sens ne puissent pas apprécier la distinction entre deux sons qui diffèrent du comma i. Cette distinction est on ne peut plus aisée, ainsi qu'on peut en faire l'essai facilement sur un violoncelle par exemple, où la grande longueur des cordes permet d'émettre deux sons distants l'un de l'autre d'un comma.

Nos sens ont donc acquis la notion de l'empreinte 5, mais ce perfectionnement de la faculté *H* a dû se faire indirectement et grâce à la faculté *Z*. Nous sommes alors en possession des empreintes définies à la figure (**137**). Les accords parfaits naissent de la théorie des trois sons et avec eux l'échelle diatonique ainsi que l'harmonie consonnante. Mais on n'obtient pas encore la notion des échelles, des cadences et des évolutions qui exigent les empreintes supérieures à 5.

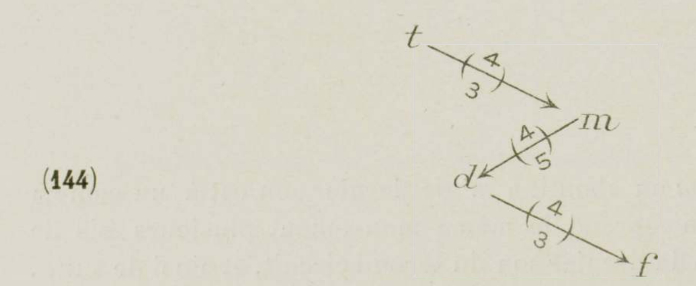
Nous pouvons encore chercher à perfectionner davantage la faculté *H* ; pour cela, ayant maintenant conquis en quelque sorte l'empreinte 5, nous allons faire parcourir à un son le circuit de la figure (**144**), circuit qui ne comprend que des cadences et une chute. Nous trouvons que l'intervalle qui sépare les sons extrêmes est le suivant :

$$\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{64}{45}\right)$$

intervalle qui peut se décomposer en deux autres de la manière suivante :

$$\left(\frac{64}{45}\right) = \left(\frac{64}{63}\right) + \left(\frac{63}{45}\right) = \left(\frac{7}{5}\right) + \left(\frac{64}{63}\right)$$

(**144**)



L'empreinte 5 du son *t* signale donc l'empreinte 7 du son *f* mais avec une erreur de $\left(\frac{64}{63}\right)$ égale au comma majeur *j*. Nos organes s'accommodent de cette nouvelle erreur en raison de la faculté *Z*. Ils prennent ainsi la notion de la septième empreinte et la zone d'équilibre prend une nouvelle extension :

$\lambda = j$ de part et d'autre de chaque empreinte.

C'est ainsi que peuvent naître les échelles des cadences et des évolu-

tions, attendu que l'empreinte additionnelle 9, qui est née depuis longtemps et bien avant l'empreinte 7, ne peut pas ne pas devenir elle-même empreinte directe.

§ 7. — **Extension complémentaire de la zone d'équilibre. — Tolérance.**

Reportons-nous au § 9, chap. VIII, et considérons la figure (**125**) sur laquelle on a mis en présence les divers sons des trois échelles. On constate que, d'une des trois échelles à une quelconque des deux autres, jamais les sons correspondants ne diffèrent de plus d'un comma, soit majeur, soit mineur. Il est aisé de comprendre que dès lors les sons correspondants des trois échelles, tout en étant réellement différents les uns des autres, peuvent être pris les uns pour les autres selon la manière dont ils sont repérés.

Mais, si au lieu de considérer les sons, on considère les intervalles, on voit que les erreurs de i et de j, entre deux sons convenablement choisis, peuvent se cumuler. Les sons r et f, sur l'échelle des cadences forment un intervalle qui diffère de celui des mêmes sons sur l'échelle des évolutions de la somme $i+j$. Cette circonstance, qui se reproduit entre les sons f et l, puis entre t et r, entraîne nécessairement une nouvelle extension de la zone d'équilibre.

Les commas i et j sont en effet indépendants l'un de l'autre. Le premier est une combinaison des nombres 3 et 5, le second une combinaison des nombres 3 et 7. Il est dès lors facile de trouver des circuits qui entraînent l'erreur cumulée $i+j$.

C'est ainsi, par exemple, qu'en effectuant, à partir d'un son t, une double

(**145**)

montée de $\left(\frac{6}{5}\right)$, t à r puis r à f, figure (**145**), on constate que l'intervalle séparant les deux sons t et f est de

$$\left(\frac{6}{5}\right) + \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{36}{25}\right)$$

on peut décomposer cet intervalle en deux autres de la manière suivante :

$$\left(\frac{36}{25}\right) = \left(\frac{36}{35}\right) + \left(\frac{35}{25}\right) = \left(\frac{36}{35}\right) + \left(\frac{7}{5}\right)$$

Or, on remarque que $\left(\frac{36}{35}\right)$ est précisément égal à $i + j$, et que l'intervalle obtenu doit être nécessairement confondu avec $\left(\frac{7}{5}\right)$. La zone d'équilibre doit donc prendre, accidentellement et lorsque de pareilles combinaisons se produisent, une nouvelle extension attribuant à λ la valeur $i + j = \left(\frac{36}{35}\right)$. C'est ce que nous nommons la tolérance parce que, comme on va le voir, il est impossible d'accommoder plus que cela la faculté Z.

§ 8. — **Impossibilité d'une nouvelle extension de la faculté** H.

Une nouvelle extension de la faculté Z, pour dépasser les empreintes additionnelles qui, unies aux empreintes directes, forment une série continue depuis la première empreinte, entraînerait la connaissance de l'empreinte 11. Nous avons déjà remarqué que l'intervalle original résultant du nombre 11 ne peut pas provenir de la théorie des trois sons, car le nombre 11 est premier et ne peut donner lieu à un intervalle original primaire. Nous allons montrer qu'il est même impossible de constituer artificiellement des intervalles qui comporteraient l'utilisation de ce nombre 11.

Supposons en effet que nous puissions sentir directement cette empreinte, cette notion entraînerait nécessairement celle de l'intervalle $\left(\frac{11}{9}\right)$ compris entre la onzième et la neuvième empreinte. Cet intervalle est plus grand que la tierce mineure, et plus petit que la tierce majeure. Les différences sont les suivantes :

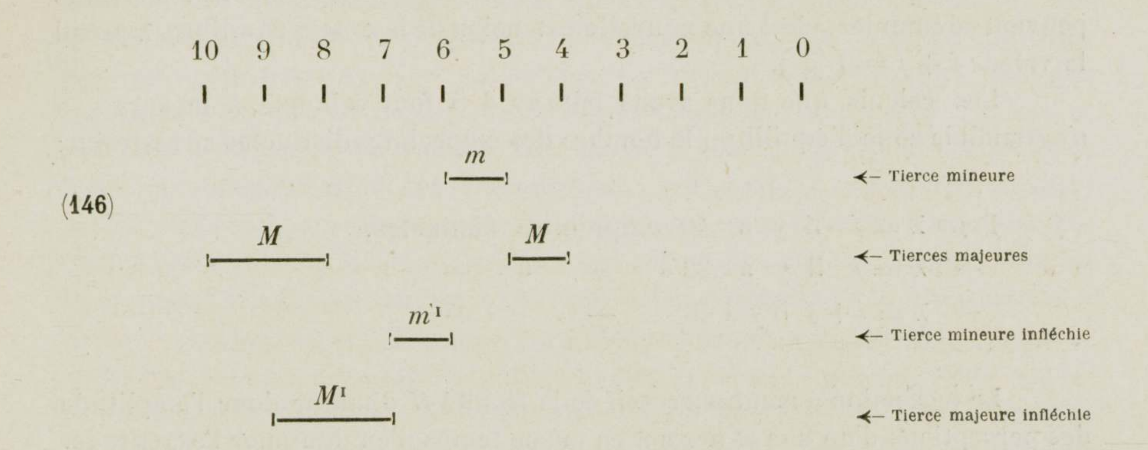
1° Avec la tierce mineure $\left(\frac{11}{9}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{55}{54}\right)$

2° Avec la tierce majeure $\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{11}{9}\right) = \left(\frac{45}{44}\right)$

Chacune de ces deux différences étant plus petite que la tolérance $\left(\frac{36}{35}\right)$ il en résulterait qu'on pourrait prendre indifféremment l'intervalle $\left(\frac{11}{9}\right)$, soit pour une tierce majeure, soit pour une tierce mineure. Or, il est facile de comprendre que l'introduction d'un pareil intervalle dans la musique, entraînerait la ruine de l'existence des accords parfaits dont toutes les propriétés reposent sur la distinction des deux tierces. Il suit de là que nos sens se sont refusés à étendre davantage la faculté H à cause de la nécessité dans laquelle ils se trouvaient de conserver les accords parfaits qui constituent la définition la plus complète d'un état harmonique de trois sons, en même temps qu'une combinaison indispensable à l'existence même de la musique.

Il n'est pas sans intérêt d'expliquer ici pourquoi l'empreinte 7 malgré l'extension extrême qu'elle a dû entraîner dans l'étendue de la zone d'équilibre, a pu être conservée concurremment avec les empreintes 3 et 5.

(**146**)



La connaissance de l'empreinte directe 7 entraîne avec elle la connaissance de la série continue des empreintes de 1 à 10 comme sur la figure (**146**). Nous marquons par un trait m, sur une seconde ligne, la tierce mineure qui existe entre les empreintes 5 et 6. Nous marquons par des traits M, sur une troisième ligne, les empreintes qui comprennent une tierce majeure. Cela fait, cherchons les intervalles qui, entre deux empreintes quelconques de la figure (**146**) et moyennant la tolérance extrême $\left(\frac{36}{35}\right)$, pourraient se confondre soit avec la tierce majeure, soit avec la tierce mineure. Nous n'en trouvons que deux, savoir : m^1 de l'empreinte 7 à l'empreinte 6, formant l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$ qui peut être pris pour $\left(\frac{6}{5}\right)$; puis M^1 entre 9 et 7, formant l'intervalle de $\left(\frac{9}{7}\right)$ qui peut être pris pour $\left(\frac{5}{4}\right)$. Mais, ce qu'il y a de remarquable dans ces deux altérations, c'est qu'elles modifient la tierce majeure par augmentation, et la

tierce mineure par diminution. Il n'y a donc aucun danger de confusion entre les deux tierces, et l'existence des accords parfaits n'est pas compromise.

Nous nous trouvons donc limité, en vertu de ce qui précède, aux moyens d'action correspondant aux empreintes dont nous avons peu à peu acquis la notion jusqu'ici. C'est avec cela et avec cela seulement que la musique peut se constituer. La faculté Z a fait peu à peu le maximum de concessions qu'elle pouvait faire à l'extension de la faculté H. La zone d'équilibre a dû d'abord s'étendre en donnant à λ la valeur i ; c'est en effet l'erreur constatée sur le son *ré* dans les échelles diatoniques qui proviennent de l'accord majeur ou de l'accord mineur. Cette extension a été faite en faveur de la connaissance de l'empreinte 5. Puis est venue l'empreinte 7 qui, pour permettre la confusion des sons des trois échelles a dû obliger la faculté Z à s'accommoder de l'erreur j en attribuant à λ cette valeur j. L'indépendance des deux commas fait que, accidentellement, et avec certaines combinaisons les erreurs peuvent se cumuler, c'est une nouvelle extension de la zone d'équilibre, λ prend la valeur $i + j = \left(\frac{36}{35}\right)$.

Les calculs que nous avons faits au § 5 font voir que, à mesure que s'agrandit la zone d'équilibre, le nombre des empreintes distinctes se restreint :

Pour $\lambda = i$ il y a 40 empreintes distinctes.
— $\lambda = j$ il y a 32 — —
— $\lambda = i + j$ il y a 18 — —

Le perfectionnement successif de la faculté H diminue donc l'amplitude des perceptions d'un son et permet en même temps d'en diminuer l'exactitude.

Il résulte également de ces diverses explications que la confusion des sons des trois échelles est désormais acquise, en tenant compte des diverses considérations que nous développerons, et moyennant certaines réserves.

§ 9. — **Importance des commas et de la tolérance. — Nécessité d'un tempérament moyen.**

Supposons que l'on veuille s'astreindre à n'émettre que des sons rigoureusement exacts. Ces sons devraient suivre, suivant les cas, tantôt les degrés de l'échelle diatonique, avec des mouvements d'accords parfaits, tantôt les

degrés de l'échelle des cadences ou de l'échelle des évolutions, dans le cas de mouvements conformes aux cadences élidées ou partielles, ou aux évolutions analogues. Cela n'irait encore pas trop mal tant que l'on garderait comme sons fixes communs aux trois échelles les sons *d* et *m*, figure (**125**), chap. VIII, § 9. les déplacements des sons seraient alors au plus d'un comma majeur. Mais il faut compter avec les mouvements nouveaux que l'on pourrait faire en s'appuyant comme pivot, sur des sons qui comportent entre eux de grands écarts d'une échelle à l'autre. Or, il ne faut pas perdre de vue que la tolérance $\left(\frac{36}{35}\right)$ est un intervalle relativement grand. Il prête sans doute à la confusion de l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$ avec $\left(\frac{6}{5}\right)$, c'est-à-dire que les mouvements du son qui résultent de ces combinaisons ne présentent aucune contradiction et que notre intelligence musicale saisit bien, au moyen des sons inexacts, le mouvement qu'auraient dû prendre les sons rigoureux. Mais cela ne veut nullement dire que notre oreille se contenterait normalement d'erreurs aussi grossières. Ces déviations deviendraient communes et courantes si l'on adoptait les sons rigoureux, les erreurs pourraient se cumuler indéfiniment, c'est pour cela que la nécessité absolue de recourir à un tempérament moyen est universellement admise. La musique ne saurait s'en passer ; sous prétexte de jouer plus juste, on entrerait dans des complications qui seraient assurément inabordables ; les sons pourraient sortir des degrés des trois échelles d'une manière quelconque, suivant le pivot choisi ; il est même impossible de concevoir un instrument capable de suivre une voie aussi arbitraire. Les instruments à cordes, pourtant si souples, ne s'y prêteraient même pas, puisqu'il faut bien conserver les sons des cordes à vide, et que ceux-ci, après plusieurs déplacements pourraient bien vite disparaître des échelles nouvelles sur lesquelles on entrerait, avec des différences faibles mais appréciables. Enfin ces modifications légères et successives des échelles entraîneraient des altérations dans le diapason qui serait sans point de repère fixe. On a donc fait la part des erreurs de manière qu'elles soient minimum. L'échelle nouvelle qui en résulte comporte des sons fixes. Elle doit représenter une quelconque des trois échelles soit diatonique, soit des cadences, soit des évolutions, suivant la façon dont les intervalles sont repérés.

Nous donnerons le calcul de l'échelle du tempérament moyen au chapitre où nous traiterons de l'échelle diatonique, mais il était urgent de signaler dès maintenant la nécessité absolue d'en venir à ce tempérament moyen. Moyennant cette réserve absolument nécessaire, nous allons continuer les études commencées.

§ 10. — Classement définitif des empreintes.

Les considérations qui précèdent nous mettent définitivement en présence de l'outil complet dont l'oreille dispose pour apprécier la musique.

L'empreinte n° 1 donne la notion du son, avec l'unisson.

L'empreinte n° 2 crée la périodicité.

L'empreinte n° 3 crée la cadence et l'évolution, et par suite la première notion de direction dans le mouvement des sons.

Ces trois premières empreintes sont nées directement et sans artifice, il n'a pas été nécessaire de faire usage de la faculté Z. C'est pour cela que les intervalles d'octave, de quinte ou de quarte sont les seuls à être absolument consonnants, ainsi qu'on le verra au chapitre suivant. La zone d'équilibre n'est pas créée encore et aucune erreur ne peut être tolérée sur les intervalles qui en résultent.

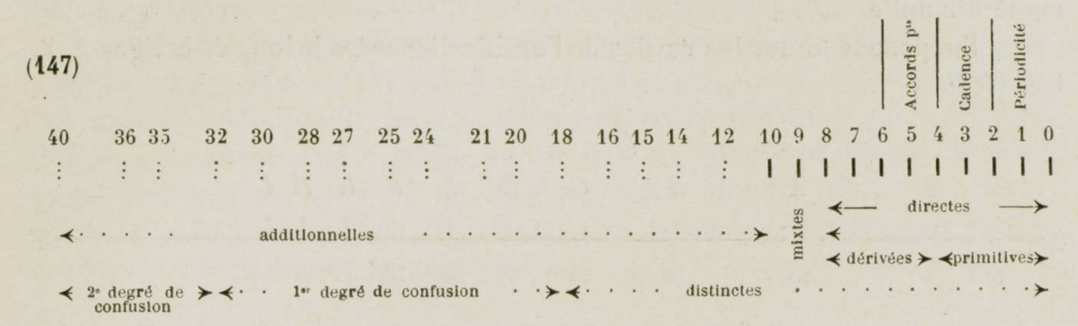
L'empreinte n° 5 est venue sur l'indication de certaines combinaisons résultant des empreintes de degré moindre ; l'identification n'a pu se faire que grâce à l'intervention de la faculté Z et avec une erreur du comma mineur $i = \left(\frac{81}{80}\right)$. L'empreinte n° 5 ainsi obtenue peut être perçue directement, mais elle n'en dérive pas moins des premières auxquelles elle est obligée de s'accommoder, moyennant le comma i. Elle détermine la connaissance des accords parfaits majeurs ou mineurs, accords dont les sons, dans leurs mouvements comportent déjà moins de justesse. Ces accords donnent un sens définitif et complet à la théorie des trois sons, ils créent par conséquent l'état harmonique.

L'empreinte n° 7 est venue, comme l'empreinte n° 5, sur l'indication de mouvements résultant des empreintes précédentes. Mais l'identification n'a pu se faire que par une aggravation très notable des erreurs. Elle permet l'échelle des cadences et celle des évolutions ; quant à l'échelle diatonique elle est résultée de l'empreinte 5. La comparaison des trois échelles s'impose, il naît de cette comparaison une série de faits d'une haute importance dont nous rendons compte dans les chapitres suivants.

En définitive, les empreintes de 1 à 7, sont appelées directes, mais les trois premières sont primitives, les autres sont dérivées. Après l'empreinte 7 viennent celles que nous avons appelées additionnelles. Mais rien ne s'oppose à ce que nos sens aient pu prendre connaissance directement des empreintes qui vont de la septième à la dixième. Ces empreintes qui sont à la fois additionnelles ou directes seront appelées empreintes mixtes. Au delà de la dixième, il n'y a plus que des empreintes additionnelles.

Mais ces empreintes additionnelles ne s'étendent pas indéfiniment en restant distinctes. La confusion commence à la dix-huitième avec la tolérance $i + j$, elle s'accentue à la trente-deuxième avec le comma majeur j, elle est complète à la quarantième avec le comma mineur i.

(**147**)



La figure (**147**) résume les explications qui précèdent.

§ 11. — **Limite des rapports des sons entre eux.**

Les rapports entre les sons s'établissent par leurs empreintes communes. Nous supposons des sons simples et sans harmoniques. La relation ne commence qu'avec la quarantième empreinte, avec cinq octaves et une tierce majeure. Cette relation est confuse. Elle s'améliore avec l'empreinte 32, correspondant à cinq octaves, mais il y a encore un certain degré de confusion. Lorsqu'on arrive à la dix-huitième empreinte, l'intervalle est de quatre octaves plus $\left(\frac{9}{8}\right)$, la netteté des relations commence. Jusque-là, les empreintes en présence n'étaient qu'additionnelles ; lorsqu'on arrive à l'empreinte 10, les relations directes commencent ; l'intervalle est de trois octaves plus une tierce majeure. Cet intervalle correspond à l'amplitude normale extrême des voix humaines, entre le *fa* grave de la basse et le *la* aigu du soprano.

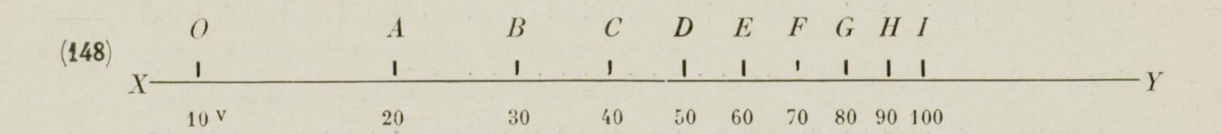
§ 12. — **Limite des sons perceptibles.**

Le nombre des cordes de l'oreille n'est pas illimité, on en compte environ six mille. Nous ne pouvons pas connaître le nombre des vibrations fonda-

mentales des cordes extrêmes. Ces nombres peuvent d'ailleurs varier d'un individu à un autre. Faisons une hypothèse quelconque pour en tirer les conséquences sur lesquelles nous voulons appeler l'attention. Supposons que la corde la plus grave donne dix vibrations fondamentales, et la corde la plus aiguë dix mille.

Supposons toutes les cordes de l'oreille disposées le long de la ligne *X Y*, fig. (**148**).

(**148**)



Soit *O* la corde la plus grave, avec dix vibrations fondamentales. Considérons successivement *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I* les cordes qui donnent 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 et 100 vibrations fondamentales. Nous voyons que :

1° Tout son simple de moins de 10 vibrations ne peut pas être perçu.

2° Tout son de 10 à 20 vibrations n'est révélé que par une seule empreinte, on ne peut repérer que l'unisson.

3° Tout son de 20 à 30 vibrations, avec deux empreintes, peut révéler l'octave.

4° Entre *B* et *C* naît la cadence.

5° Entre *D* et *E* naissent les accords parfaits, etc., etc.

A mesure que le son s'élève, les intervalles qu'on peut mesurer se resserrent. Les sons graves se prêtent mal aux intervalles serrés.

Au delà du point *I* apparaissent les empreintes additionnelles. Quand on arrive à 180 vibrations, on possède toutes les empreintes distinctes ; on possède les empreintes du premier degré de confusion à partir de 320 vibrations et on les possède toutes à 400 vibrations.

Le diapason donnant 870 vibrations, on constate que :

1° Le violon, du *sol* grave, au *si* aiguë première position, émet des sons qui s'étendent de $391^v,5$ à $1957^v,5$.

La perception des sons donnés par le violon est donc complète.

2° L'alto commence à 261^v, ses sons donnent donc toutes les empreintes distinctes et davantage.

3° Le violoncelle commence à l'*ut* de $130^v,5$, possède toutes les empreintes distinctes, sauf les sons graves à partir du *fa* où il en manque quelques-unes.

4° La contrebasse descend jusqu'à 84 vibrations, les sons émis possèdent sauf les deux derniers, toutes les empreintes directes.

Au-dessous de ces sons, les basses ne peuvent servir qu'à préciser les supports réels des intervalles formés par des sons plus élevés, et à donner de la netteté à certaines empreintes éloignées qui tendraient à se confondre.

Lorsqu'au lieu de considérer des sons graves on considère des sons aigus, on voit qu'à partir de 10,000 vibrations et plus, les perceptions deviennent incomplètes. Toutes les empreintes directes échappent après 100,000 vibrations. La notion d'un véritable son se perd certainement dès que le dernier son implicite n'a pas au moins cinq empreintes directes. Cette limite correspondrait à 20,000 vibrations. Au-dessus, les notions perdraient leur caractère, les sensations étant trop incomplètes.

Remarque. — S'il existe 6,000 cordes dans l'oreille, et si les cordes extrêmes donnent respectivement 10 et 10,000 vibrations fondamentales, l'intervalle moyen entre deux cordes consécutives de l'oreille serait moindre que un dixième de comma mineur. Ce petit intervalle formerait la limite au-dessous de laquelle nous ne pouvons pas apprécier la différence de deux sons, indépendamment de toute adaptation résultant de la faculté *Z*.

CHAPITRE X

Consonnance et Dissonnance

§ 1. — Intervalles complets et intervalles incomplets.

Jusqu'ici, nous avons étudié les mouvements des sons, sans nous préoccuper des moyens limités dont nous disposons. Connaissant ces moyens limités, conformément au chapitre précédent, il faut désormais nous y maintenir.

On dit qu'un intervalle est complet quand, dans un au moins de ses états particuliers, il est représenté par toutes ses empreintes personnelles, sans lacune ; cet état particulier est nécessairement représenté par une fraction dont les termes correspondent aux empreintes directes, puisque ce sont les seules qui forment une série continue sans lacune. Les intervalles généraux complets se ramènent tous aux intervalles suivants :

1° Ceux qui dérivent d'intervalles primaires :

$\left(\frac{1}{1}\right)$ ou $\left(\frac{2}{1}\right)$ unisson ou octave ; $\left(\frac{3}{2}\right)$ ou $\left(\frac{3}{4}\right)$ quinte ou quarte ; $\left(\frac{5}{4}\right)$ tierce majeure ; $\left(\frac{6}{5}\right)$ tierce mineure ; $\left(\frac{7}{6}\right)$, $\left(\frac{8}{7}\right)$, $\left(\frac{9}{8}\right)$, $\left(\frac{10}{9}\right)$.

2° Ceux qui ne découlent pas d'intervalles primaires : $\left(\frac{9}{7}\right)$ et $\left(\frac{7}{5}\right)$.

Tous les autres intervalles sont incomplets, c'est-à-dire que, de quelque manière qu'on les transforme, pour les amener à divers états, il est impossible de trouver une combinaison qui ne comporte pas de lacune dans les empreintes personnelles de l'intervalle.

Jusqu'ici, nous avons remarqué les intervalles incomplets suivants :

$\left(\frac{16}{15}\right), \left(\frac{15}{14}\right), \left(\frac{21}{20}\right), \left(\frac{28}{27}\right)$. A propos des cadences élidées.

$\left(\frac{35}{32}\right)$. A propos des chutes élidées.

$\left(\frac{36}{35}\right), \left(\frac{64}{63}\right), \left(\frac{81}{80}\right)$. Qui forment les commas et la tolérance.

$\left(\frac{25}{24}\right)$. A propos de la faculté *H*.

Nous en rencontrerons d'autres ; comme $\left(\frac{49}{48}\right)$ différence de $\left(\frac{7}{6}\right)$ et de $\left(\frac{8}{7}\right)$; comme $\left(\frac{128}{125}\right)$ différence d'une octave et de trois tierces majeures ; comme $\left(\frac{50}{49}\right)$ différence entre $\left(\frac{10}{7}\right)$ et $\left(\frac{7}{5}\right)$; comme $\left(\frac{21}{16}\right)$ ou $\left(\frac{27}{16}\right)$ relevés sur les échelles des cadences ou des évolutions, etc.

§ 2. — **Etat défini d'un intervalle complet.**

Lorsqu'on envisage un état particulier d'un intervalle complet, deux cas peuvent se présenter :

1° Toutes les empreintes personnelles sont distinctes. Aucune empreinte personnelle d'un des sons ne pénètre dans la zone d'équilibre d'une empreinte personnelle de l'autre son.

On dit alors que l'intervalle se présente dans un état défini.

2° Une ou plusieurs empreintes personnelles de l'un des sons pénètre dans la zone d'équilibre d'une empreinte personnelle de l'autre son. Il se produit alors la confusion dont nous avons parlé au § 4 du chapitre précédent.

On dit alors que l'intervalle n'est pas dans un état défini.

Considérons par exemple l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$. Calculons le rapprochement des empreintes personnelles, en dressant un tableau conforme à celui qui a été dressé aux applications du § 5, chap. II :

Q	$\frac{Qp}{q}$	P	$\frac{P}{Q}$	$\left(\frac{pQ}{qP}\right)$
2	$\frac{14}{5}$	3	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{14}{15}\right)$
3	$\frac{21}{5}$	4	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{21}{20}\right)$
4	$\frac{28}{5}$	6	$\frac{6}{4}$	$\left(\frac{14}{15}\right)$

Les empreintes personnelles les plus voisines sont séparées par l'intervalle $\left(\frac{21}{20}\right)$ qui est supérieur à la tolérance $i+j=\left(\frac{36}{35}\right)$. L'état $\left(\frac{7}{5}\right)$ de l'intervalle général considéré est donc défini.

Considérons un autre état du même intervalle : $\left(\frac{7}{10}\right)$, état qui est complet puisque les deux termes de la fraction représentative sont chacun égaux ou inférieurs à 10. Nous formerons le même tableau que précédemment, mais en prenant l'intervalle positivement : $\left(\frac{10}{7}\right)$, pour avoir moins de fenêtres à considérer dans le tableau. Nous constatons que les empreintes 7 et 5 de chacun des deux sons, sont séparées par l'intervalle $\left(\frac{50}{49}\right)$ qui est moindre que la tolérance $i+j=\left(\frac{36}{35}\right)$. L'état $\left(\frac{7}{10}\right)$ du même intervalle général n'est donc pas un état défini.

Q	$\frac{Qp}{q}$	P	$\left(\frac{P}{Q}\right)$	$\left(\frac{pQ}{qP}\right)$
2	$\frac{20}{7}$	3	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{20}{21}\right)$
3	$\frac{30}{7}$	4	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{15}{14}\right)$
4	$\frac{40}{7}$	6	$\frac{6}{4}$	$\left(\frac{20}{21}\right)$
5	$\frac{50}{7}$	7	$\frac{7}{5}$	$\left(\frac{50}{49}\right)$
6	$\frac{60}{7}$	9	$\frac{9}{6}$	$\left(\frac{20}{21}\right)$

§ 3. — **Intervalles consonnants.**

On dit qu'un intervalle est consonnant quand tous ses états particuliers complets sont définis. Les intervalles consonnants sont les suivants, exprimés dans tous leurs états complets :

— $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \left(\frac{8}{1}\right)$: Unissons, octaves.

— $\left(\frac{6}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right), \left(\frac{3}{8}\right)$: Quintes ou quartes.

L'état le plus défavorable des empreintes personnelles correspond à $\left(\frac{3}{8}\right)$, comparé à $\left(\frac{2}{5}\right)$: l'écart est $\left(\frac{2}{5}\right) - \left(\frac{3}{8}\right) = \left(\frac{16}{15}\right)$ supérieur à la tolérance.

— $\left(\frac{10}{1}\right), \left(\frac{5}{1}\right), \left(\frac{5}{2}\right), \left(\frac{5}{4}\right), \left(\frac{5}{8}\right)$: Tierce majeure et ses dérivés.

L'état le plus défavorable est $\left(\frac{5}{8}\right)$; comparé à $\left(\frac{2}{5}\right)$, on a l'écart $\left(\frac{25}{24}\right)$, supérieur à la tolérance.

— $\left(\frac{6}{5}\right), \left(\frac{3}{5}\right), \left(\frac{3}{10}\right)$: Tierce mineure et ses dérivés.

L'état le plus défavorable est $\left(\frac{6}{5}\right)$; comparé à $\left(\frac{5}{4}\right)$, il donne : $\left(\frac{25}{24}\right)$, supérieur à la tolérance.

Tous les autres intervalles complets présentent au moins un état non défini.

§ 4. — Intervalles dissonnants.

Tous les intervalles qui ne sont pas consonnants sont appelés dissonnants. Considérons tout d'abord les intervalles complets dissonnants, ce sont :

— $\left(\frac{7}{3}\right), \left(\frac{7}{6}\right)$:

Le premier état est défini, avec l'écart : $\left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{15}{14}\right)$ plus grand que la tolérance.

Le second état $\left(\frac{7}{6}\right)$ n'est pas défini ; écart : $\left(\frac{6}{5}\right) - \left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{36}{35}\right)$

— $\left(\frac{7}{1}\right), \left(\frac{7}{2}\right), \left(\frac{7}{4}\right), \left(\frac{7}{8}\right)$: Les trois premiers états sont définis ; écart : $\left(\frac{7}{4}\right) - \left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{21}{20}\right)$.

Le dernier $\left(\frac{7}{8}\right)$ ne l'est pas : $\left(\frac{7}{6}\right) - \left(\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{49}{48}\right)$.

— $\left(\frac{9}{1}\right), \left(\frac{9}{2}\right), \left(\frac{9}{4}\right), \left(\frac{9}{8}\right)$: Les trois premiers états sont définis ; écart : $\left(\frac{9}{4}\right) - \left(\frac{7}{3}\right) = \left(\frac{27}{28}\right)$.

Le dernier $\left(\frac{9}{8}\right)$ ne l'est pas : $\left(\frac{9}{8}\right) - \left(\frac{8}{7}\right) = \left(\frac{63}{64}\right)$.

— $\left(\frac{10}{9}\right), \left(\frac{5}{9}\right)$: n'est pas défini dans aucune de ses positions ; les écarts sont : $\left(\frac{81}{80}\right)$ et $\left(\frac{36}{35}\right)$.

— $\left(\frac{9}{7}\right)$: n'est pas défini ; écart : $\left(\frac{9}{7}\right) - \left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{36}{35}\right)$.

— $\left(\frac{7}{5}\right), \left(\frac{7}{10}\right)$: étudiés au § précédent : $\left(\frac{7}{5}\right)$ défini avec l'écart $\left(\frac{21}{20}\right)$; $\left(\frac{7}{10}\right)$ non défini avec l'écart $\left(\frac{50}{49}\right)$.

La dissonance de ces divers intervalles est atténuée quand ils se présentent dans un état défini, mais l'impression de dissonance subsiste néanmoins ; c'est que, des sons exprimés, nous sentons et séparons intuitivement les sons implicites à l'octave au-dessous ; ces sons intuitifs font apparaître la dissonance dans celui des états de l'intervalle où elle existe.

Quant aux intervalles incomplets, ils sont dissonnants par leur nature même.

§ 5. — **Accords consonnants.**

Il résulte de ce qui précède qu'il existe en tout et pour tout trois intervalles consonnants. (L'octave est assimilé à l'unisson). Ces trois intervalles se ramènent à la quinte et aux deux tierces majeures et mineures. La quinte étant

égale à la somme des deux tierces, il saute aux yeux qu'on peut former un groupe de trois sons, ayant entre eux deux à deux des intervalles consonnants.

(149)

A B C

$|\prec \cdot \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \cdot \succ|\prec \cdot \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \succ|$

$\prec \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \succ$

A^{I} D B^{I} C^{I}

$\prec \cdot \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \succ\prec \cdot \cdot \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \succ$

A^{II} B^{II} C^{II} E

$|\prec \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdot \succ$

F A^{III} B^{III} C^{III}

$\prec \cdot \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \succ|$

Considérons la figure (**149**). La première ligne représente trois sons qui forment entre eux, deux à deux, des intervalles consonnants cotés. La seconde ligne montre un quatrième son D, consonnant avec A et C, mais dissonnant avec B. La troisième ligne et la quatrième ligne montrent chacune un son E et F, respectivement consonnants avec B^{II} et C^{II}, A^{III} et B^{III}, mais dissonnants avec A^{II} et C^{III}. Il est impossible, par conséquent, de trouver un quatrième son consonnant avec les trois premiers.

On conclut de là que les accords consonnants ne peuvent avoir que trois sons et qu'ils sont de deux formes. Ce sont les accords parfaits déjà envisagés.

§ 6. — Accords dissonnants.

Les quatre sons des trois dernières lignes de la figure (**149**) ne comprennent que des intervalles consonnants, sauf un qui est dissonnant. Le groupe de la seconde ligne est formé de sons qui ne peuvent pas se poser sur l'échelle diatonique, nous le laissons de côté, pour y revenir plus tard. Considérons les deux autres groupes. On peut les porter sur divers sons de l'échelle diatonique, savoir :

Pour le groupe de la troisième ligne :

(**150**)	*f*	*l*	*d*	*m*
	d	*m*	*s*	*t*

Pour le groupe de la quatrième ligne :

	$\underset{-}{r}$	*f*	*l*	*d*
(**151**)	*l*	*d*	*m*	*s*
	m	*s*	*t*	$\underset{+}{r}$

$\underset{-}{r}$ indique le *ré* de l'échelle déduite de l'accord mineur *l d m*.

$\underset{+}{r}$ indique le *ré* de l'échelle déduite de l'accord majeur *d m s*.

Ces deux groupes forment ce qu'on nomme des accords dissonnants.

§ 7. — Accord mixte.

On a vu que l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$ ne présente qu'un seul état dissonnant, encore cet état borde-t-il la consonnance puisqu'il est à la limite exacte de tolérance $\left(\frac{36}{35}\right)$. Si on le combine avec $\left(\frac{5}{6}\right)$, on constitue un groupe de

trois sons que nous avons signalé, soit dans la théorie des trois sons, soit à propos des cadences partielles. Ces trois sons peuvent constituer deux accords, conformément aux figures (**152**) et (**153**). Nous les désignons sous le nom d'accords mixtes, parce que, dans cet état ils se présentent en bordure de la consonnance et de la dissonnance et avec des intervalles ramenés à des états aussi serrés que possible.

(**152**)

$$\begin{array}{ccc} \prec \cdot \cdot & \left(\frac{7}{5}\right) & \cdot \cdot \succ \\ | & | & | \\ \prec \left(\frac{6}{5}\right) \succ & & \prec \left(\frac{7}{6}\right) \succ \end{array}$$

(**153**)

$$\begin{array}{ccc} \prec \cdot \cdot & \left(\frac{7}{5}\right) & \cdot \cdot \succ \\ |\prec & | & | \\ \prec \left(\frac{7}{6}\right) \succ & & \prec \left(\frac{6}{5}\right) \succ \end{array}$$

§ 8. — **Inflexions des intervalles consonnants. — Consonnance parfaite et imparfaite.**

Les empreintes personnelles des intervalles consonnants sont distinctes ; mais il peut arriver que certaines empreintes supérieures de l'un des sons pénètrent dans la zone d'équilibre d'une empreinte de l'autre son. Cette quasi-coïncidence des deux empreintes définit un nouvel intervalle que nous appelons une inflexion du premier.

Lorsque ces inflexions portent sur des empreintes directes, le nouvel intervalle est complet ; l'inflexion est alors complète.

Lorsque les inflexions portent sur des empreintes additionnelles, le nouvel intervalle est incomplet ; l'inflexion est alors incomplète.

Il est d'ailleurs entendu que, si les inflexions portent sur des empreintes inexistantes, comme **11**, **13**, **17**, etc., elles sont considérées comme non avenues.

Considérons tout d'abord l'intervalle de quinte et cherchons quels sont les autres intervalles qui s'en rapprochent le plus.

En appliquant la formule du chapitre II, § 7, nous constatons que la quinte ne possède aucune inflexion complète. Nous trouvons par contre une inflexion incomplète avec l'intervalle $\left(\frac{32}{21}\right)$ qui, comparé à la quinte donne :

$$\left(\frac{32}{21}\right) - \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{64}{63}\right)$$ c'est-à-dire le comma majeur.

On voit de même que la quarte ne possède aucune inflexion complète ; par contre elle donne lieu à l'inflexion incomplète suivante :

$$\left(\frac{21}{16}\right) - \left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{63}{64}\right)$$

qui est la contrepartie de la précédente.

Pour la tierce majeure, il existe l'inflexion complète $\left(\frac{9}{7}\right)$ déjà signalée.

Pour la tierce mineure, il y a également l'inflexion complète $\left(\frac{7}{6}\right)$ connue. Nous signalons également, à propos de la tierce mineure, l'inflexion incomplète $\left(\frac{32}{27}\right)$ qui donne l'écart

$$\left(\frac{6}{5}\right) - \left(\frac{32}{27}\right) = \left(\frac{81}{80}\right)$$

Lorsqu'un intervalle consonnant ne possède aucune inflexion complète, on dit qu'il y a consonnance parfaite ; c'est qu'en effet aucune confusion d'intervalle ne peut se produire au moyen des empreintes directes. On voit que (à part l'unisson et l'octave qu'on ne doit pas considérer comme des intervalles, au sens général du mot, puisque c'est l'identité de son dans l'état général), il n'existe qu'un seul intervalle de consonnance parfaite, intervalle qui se présente sous les deux formes de quinte ou quarte.

Les tierces constituent des intervalles de consonnance imparfaite, puisqu'elles comportent des inflexions qui portent sur les empreintes directes ; il y a donc des confusions possibles avec des intervalles complets.

On dit qu'une inflexion d'un intervalle est harmonique lorsque, sur les mêmes sons de l'échelle, on constate à la fois l'intervalle considéré et ses inflexions, suivant qu'on passe de l'échelle diatonique aux échelles des cadences ou des évolutions. On voit que toutes les inflexions que nous avons signalées, pour les intervalles consonnants, sont harmoniques.

§ 9. — Inflexions des intervalles dissonnants. — Inflexions anharmoniques.

Avec les intervalles dissonnants les confusions dans les empreintes peuvent se produire sur les empreintes personnelles, c'est même en cela que consiste la dissonnance. Ces confusions peuvent encore se présenter sur des empreintes supérieures.

Les intervalles qui correspondent à ces quasi-coïncidences d'empreintes se nomment inflexions des intervalles dissonnants. Ces inflexions peuvent être complètes ou incomplètes, conformément à ce qui a été dit au § précédent. Nous allons examiner quelques-unes des inflexions des intervalles dissonnants.

Considérons d'abord l'intervalle dissonnant $\left(\frac{7}{5}\right)$. Les calculs donnés au § 2 précédent montrent que cet intervalle comporte l'inflexion $\left(\frac{10}{7}\right)$. En examinant les échelles on voit que jamais sur les mêmes sons, l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$ n'est remplacé par son inflexion $\left(\frac{10}{7}\right)$, il s'agit donc d'une inflexion anharmonique. L'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$, sur les échelles des cadences ou des évolutions, est compris entre les sons *si* et *fa* en montant, l'intervalle $\left(\frac{10}{7}\right)$ est compris entre les sons *fa* et *si* en montant. Le premier intervalle comporte cinq sons entre les extrêmes, ceux-ci compris ; le second n'en a que quatre. Il est impossible de confondre ces deux intervalles sur une même échelle sous peine de donner la notion de périodicités sous multiples de l'octave, et de conduire à des incompatibilités :

Confondre $\left(\frac{7}{5}\right)$ et $\left(\frac{10}{7}\right)$ sur la même échelle, c'est admettre la division de l'octave en deux parties égales. D'un autre côté, comme $\left(\frac{7}{5}\right)$ se compose des intervalles $\left(\frac{6}{5}\right)$ et $\left(\frac{7}{6}\right)$ dont l'un est une inflexion de l'autre, ce serait faire une division de l'octave en quatre parties aliquotes. Enfin, comme $\left(\frac{10}{7}\right)$ se compose d'une tierce majeure $\left(\frac{5}{4}\right)$ plus $\left(\frac{8}{7}\right)$, comme aussi $\left(\frac{5}{4}\right)$ est formé des deux intervallles $\left(\frac{10}{9}\right)$ et $\left(\frac{9}{8}\right)$, on constate finalement que l'on a :

$$\left(\frac{10}{7}\right) = \left(\frac{10}{9}\right) + \left(\frac{9}{8}\right) + \left(\frac{8}{7}\right)$$

Or, chacun de ces trois derniers intervalles est une inflexion d'un quelconque des autres, la confusion de $\left(\frac{7}{5}\right)$ avec $\left(\frac{10}{7}\right)$ entraînerait une division de l'octave en trois ou en six parties égales. Il est donc impossible de confondre sur une même échelle les deux intervalles $\left(\frac{7}{5}\right)$ et $\left(\frac{10}{7}\right)$ sans entraîner une incompatibilité complète entre les sons. C'est un sujet sur lequel nous reviendrons quand nous aborderons l'étude de l'anharmonie.

Considérons encore l'intervalle $\left(\frac{7}{6}\right)$; il comporte d'abord l'inflexion harmonique $\left(\frac{6}{5}\right)$, ainsi qu'on peut le voir sur les échelles ; il admet encore l'inflexion $\left(\frac{8}{7}\right)$, qui est anharmonique et sur laquelle nous aurons à revenir.

L'intervalle $\left(\frac{9}{7}\right)$ admet l'inflexion harmonique $\left(\frac{5}{4}\right)$; les intervalles $\left(\frac{10}{9}\right)$, $\left(\frac{9}{8}\right)$, $\left(\frac{8}{7}\right)$ sont respectivement des inflexions l'un de l'autre, comme nous l'avons remarqué à propos de l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$ étudié ci-dessus ; ces inflexions sont harmoniques.

Avec ce qui précède, nous avons passé en revue tous les intervalles dissonnants complets. Il nous reste à examiner les inflexions des intervalles dissonnants incomplets. Tous ces intervalles sont des différences d'intervalles complets ; on dit alors qu'un intervalle dissonnant est infléchi, quand, pour effectuer cette différence, on substitue à l'un ou à l'autre des intervalles complets primitifs, d'autres intervalles complets infléchis.

Considérons par exemple l'intervalle $\left(\frac{16}{15}\right)$ formé par la différence d'une tierce majeure et d'une quarte.

$$\left(\frac{16}{15}\right) = \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{4}\right)$$

Remplaçons la quarte par son inflexion harmonique $\left(\frac{21}{16}\right)$, nous obtiendrons une inflexion harmonique de $\left(\frac{16}{15}\right)$, savoir :

$$\left(\frac{21}{16}\right) - \left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{21}{20}\right)$$

Remplaçons, dans la première égalité, $\left(\frac{5}{4}\right)$ par son inflexion harmonique $\left(\frac{9}{7}\right)$ nous obtiendrons une autre inflexion harmonique de $\left(\frac{16}{15}\right)$, savoir :

$$\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{9}{7}\right) = \left(\frac{28}{27}\right)$$

Remplaçons enfin, toujours dans la première égalité, $\left(\frac{5}{4}\right)$ et $\left(\frac{4}{3}\right)$ par les deux inflexions signalées, nous obtiendrons l'intervalle $\left(\frac{16}{15}\right)$ doublement infléchi :

$$\left(\frac{21}{16}\right) - \left(\frac{9}{7}\right) = \left(\frac{49}{48}\right)$$

Ainsi, l'intervalle $\left(\frac{16}{15}\right)$ a trois inflexions harmoniques qui sont :

$$\left(\frac{21}{20}\right) \quad \left(\frac{28}{27}\right) \text{ et } \left(\frac{49}{48}\right)$$

Il est facile de comprendre que dans le mouvement rationnel des sons, ces intervalles interviennent pour se substituer à $\left(\frac{16}{15}\right)$. Or, on remarque que le dernier est précisément la différence de $\left(\frac{7}{6}\right)$ et de $\left(\frac{8}{7}\right)$; comme l'intervalle $\left(\frac{16}{15}\right)$ doit subsister entre la quarte et la tierce majeure, sous peine de ruiner les accords parfaits, il est impossible de négliger $\left(\frac{49}{48}\right)$ bien qu'il soit moindre que la tolérance ; il est par suite impossible de confondre l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$ avec $\left(\frac{7}{6}\right)$. C'est une nouvelle preuve de la nécessité absolue d'un tempérament moyen.

Le même intervalle $\left(\frac{16}{15}\right)$ apparaît comme la différence $\left(\frac{6}{5}\right) - \left(\frac{9}{8}\right)$, en remplaçant ces deux derniers par leurs inflexions, on obtient les mêmes intervalles infléchis que ci-dessus, avec $\left(\frac{27}{25}\right)$ en plus.

Considérons l'intervalle $\left(\frac{25}{24}\right)$ formé par la différence $\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{6}{5}\right)$, il présente les inflexions suivantes :

$$\left(\frac{9}{7}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{15}{14}\right)$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{15}{14}\right)$$

$$\left(\frac{9}{7}\right) - \left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{54}{49}\right)$$

Bien qu'il s'agisse d'un intervalle non contenu dans l'échelle, on dit encore qu'il y a inflexion harmonique quand on est parti d'intervalles harmoniquement infléchis.

Considérons les intervalles $\left(\frac{7}{5}\right)$ et $\left(\frac{10}{7}\right)$ qui portent, comme nous l'avons dit sur les espaces entre *si* et *fa*, et entre *fa* et *si* en montant, espaces comptés sur les échelles des cadences ou des évolutions. Les intervalles entre les mêmes sons, sur l'échelle diatonique, sont les suivants :

de *si* à *fa* $\left(\frac{64}{45}\right)$ qui est une inflexion harmonique de $\left(\frac{7}{5}\right)$

de *fa* à *si* $\left(\frac{45}{32}\right)$ qui est une inflexion harmonique de $\left(\frac{10}{7}\right)$

La différence entre les deux intervalles donnés est la suivante :

$$\left(\frac{10}{7}\right) - \left(\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{50}{49}\right)$$

Remplaçons $\left(\frac{10}{7}\right)$ par $\left(\frac{45}{32}\right)$ on aura :

$$\left(\frac{45}{32}\right) - \left(\frac{7}{5}\right) = \left(\frac{225}{224}\right)$$

Remplaçons $\left(\frac{7}{5}\right)$ par $\left(\frac{64}{45}\right)$ on aura :

$$\left(\frac{10}{7}\right) - \left(\frac{64}{45}\right) = \left(\frac{225}{224}\right)$$

Remplaçons enfin $\left(\frac{7}{5}\right)$ et $\left(\frac{10}{7}\right)$ par $\left(\frac{64}{45}\right)$ et $\left(\frac{45}{32}\right)$ on aura :

$$\left(\frac{45}{32}\right) - \left(\frac{64}{65}\right) = \left(\frac{2025}{2048}\right)$$

Intervalles qui doivent être considérés comme des inflexions harmoniques les uns des autres.

§ 10. — **Les Sons indicateurs.**

Lorsqu'on exprime deux sons formant entre eux un intervalle consonnant, il est impossible de se méprendre sur cet intervalle. Aucune confusion n'est possible. Mais si l'on vient à exprimer un intervalle dissonnant, nous pouvons le confondre avec d'autres intervalles toutes les fois qu'il est exprimé dans un état non défini. Pour qu'un intervalle dissonnant puisse être interprété pour sa véritable valeur, en l'absence de toute autre indication, il est indispensable de l'exprimer dans un de ses états définis.

Prenons comme premier exemple l'intervalle $\left(\frac{9}{8}\right)$ qui est dissonnant, pour qu'il ne soit pas confondu, ni avec $\left(\frac{10}{9}\right)$, ni avec $\left(\frac{8}{7}\right)$ qui sont deux de ses inflexions, il faut que l'intervalle soit présenté sous la forme $\left(\frac{9}{4}\right)$, qui est la plus serrée des positions définies de l'intervalle.

Prenons comme second exemple l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$, pour qu'il soit pris à sa valeur, il convient de l'exprimer sous la forme $\left(\frac{4}{7}\right)$.

Dans le premier cas, l'intervalle doit être redoublé, dans le second il doit être renversé.

Si on considère l'intervalle $\left(\frac{10}{9}\right)$, on sait qu'il ne comporte aucun état entièrement défini, c'est un intervalle qui présente la dissonnance dans tous ses états. Cette dissonnance est à son degré moindre avec la forme du renversement $\left(\frac{5}{9}\right)$, mais il y a encore dissonnance en raison de l'intervalle $\left(\frac{4}{7}\right)$ qui, avec des empreintes d'ordre moindre, présente une différence égale à la tolérance.

Réciproquement, lorsqu'on exprime un intervalle qui est un infléchissement d'un intervalle consonnant, si aucune autre indication n'intervient, nous le prenons invinciblement pour l'intervalle consonnant, conformément à ce qui a été expliqué au chap. IX, § 4. De la même manière lorsqu'on exprime l'intervalle $\left(\frac{9}{8}\right)$ sous la forme indéfinie $\left(\frac{9}{16}\right)$, nous le prendrons pour la forme définie $\left(\frac{4}{7}\right)$; si l'on exprime encore l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$ sous la forme $\left(\frac{16}{7}\right)$, nous le prendrons aussi pour $\left(\frac{9}{4}\right)$. On remarque que les sons qui comportent, sur les échelles, les intervalles $\left(\frac{9}{8}\right)$ ou $\left(\frac{8}{7}\right)$ sont des sons contiguës, on peut exprimer ce qui précède en disant que, en transformant ces intervalles par redoublement, de manière à intercaler neuf sons, extrêmes compris, on signale l'intervalle $\left(\frac{9}{8}\right)$, au lieu que, en les transformant par renversement, de manière à intercaler sept sons, extrême compris, on signale l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$.

Il suit de ce qui précède que lorsqu'on exprime un accord consonnant, même avec des intervalles infléchis, nous le prenons toujours si aucune autre indication n'intervient, pour un accord parfait. Si, au contraire, un intervalle dissonnant intervient dans un accord, il n'est nullement indifférent de présenter cet intervalle dans un état quelconque. Le renversement convient à l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$, on peut à la rigueur admettre la position serrée elle-même $\left(\frac{8}{7}\right)$, mais pas la position redoublée $\left(\frac{16}{7}\right)$ qui attirera invinciblement la confusion avec $\left(\frac{9}{4}\right)$. Quant à l'intervalle $\left(\frac{9}{8}\right)$, c'est le redoublement qui convient et pas le renversement.

Pour bien faire saisir notre pensée, nous allons envisager par exemple l'accord de septième de dominante, étudié au chapitre VIII, § 10. Nous l'avons trouvé sous la forme de la figure (**128**) :

r *f* *s* *t*

L'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$ se présente entre *fa* et *sol*. Nous l'avons également trouvé sous la forme (**131**) :

s *t* *r* *f*

L'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$ se présente sous la forme $\left(\frac{4}{7}\right)$ de *fa* à *sol*, c'est-à-dire le renversement. On ne doit pas le présenter de manière à faire apparaître le même intervalle sous la forme indéfinie $\left(\frac{16}{7}\right)$:

(**154**) *f* *t* *r* *s*

L'accord perdrait son caractère d'accord de septième de dominante puisque le rapport de *fa* à *sol* serait repéré $\left(\frac{9}{4}\right)$ au lieu d'être indiqué par l'empreinte 7.

Prenons la contre partie de ce qui précède et considérons par exemple l'intervalle $\left(\frac{9}{7}\right)$, placé de *fa* à *la* sur l'échelle des cadences. Si aucune indication n'intervient, nous le prenons pour son infléchissement consonnant $\left(\frac{5}{4}\right)$. Mais si, en même temps que nous exprimons l'intervalle $\left(\frac{9}{7}\right)$ de *fa* à *la*, nous exprimons le son *sol*, à sept sons au-dessous de *fa* et à neuf sons au-dessous

de *la*, immédiatement nous caractérisons les deux intervalles : l'un de *sol* à *fa*, pris pour $\left(\frac{7}{4}\right)$ l'autre de *sol* à *la*, pris pour $\left(\frac{9}{4}\right)$. Le son *sol* ainsi ajouté est donc un son indicateur de l'intervalle $\left(\frac{9}{7}\right)$: figure (**155**).

$$\longleftarrow \cdots \left(\frac{9}{7}\right) \cdots \longrightarrow$$

(**155**) *s* *f* *l*

$$\longleftarrow \cdots\cdots \left(\frac{7}{4}\right) \cdots\cdots \longrightarrow$$

$$\longleftarrow \cdots\cdots\cdots \left(\frac{9}{4}\right) \cdots\cdots\cdots \longrightarrow$$

Bien plus, si les sons *fa* et *la*, au lieu d'être séparés par la tierce majeure infléchie $\left(\frac{9}{7}\right)$ étaient séparés par la tierce réelle $\left(\frac{5}{4}\right)$, l'apparition du son *sol*, comme sur la figure (**155**) ferait passer cette tierce exacte pour la tierce infléchie $\left(\frac{9}{7}\right)$. Tel est le rôle du son indicateur *sol*.

L'intervalle $\left(\frac{9}{7}\right)$ peut encore être révélé en plaçant le son indicateur au-dessus des deux sons de l'intervalle, comme sur la figure (**156**) ; elle correspond à une situation déterminée des sons sur l'échelle des évolutions.

$$\longleftarrow \cdots \left(\frac{9}{7}\right) \cdots \longrightarrow$$

(**156**) *s* *t* *l*

$$\longleftarrow \cdots\cdots \left(\frac{7}{4}\right) \cdots\cdots \longrightarrow$$

$$\longleftarrow \cdots\cdots\cdots \left(\frac{9}{4}\right) \cdots\cdots\cdots \longrightarrow$$

Si, au lieu de considérer la tierce majeure infléchie, nous envisageons la tierce mineure infléchie, les sons indicateurs correspondants se placent comme sur les figures (**157**) et (**158**) :

$$\leftarrow \cdot \left(\frac{7}{6}\right) \cdot \rightarrow$$

(**157**) *s* *r* *f* (Caractérise l'accord de septième de dominante).

$$\leftarrow \cdots\cdots \left(\frac{7}{4}\right) \cdots\cdots \rightarrow$$

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{3}{2}\right) \cdots \rightarrow$$

$$\leftarrow \cdot \left(\frac{7}{6}\right) \cdots \rightarrow$$

(**158**) *t* *r* *l* (Caractérise l'accord de septième de sensible).

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{3}{2}\right) \cdots \rightarrow$$

$$\leftarrow \cdots\cdots \left(\frac{7}{4}\right) \cdots\cdots \rightarrow$$

Considérons l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$ qui correspond à une position définie ; lorsqu'on l'exprime, nous lui attribuons la valeur indiquée. Cet intervalle se pose, sur les échelles de cadence et d'évolution entre *si* et *fa* en montant.

Si au lieu d'exprimer l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$ nous exprimons son inflexion $\left(\frac{10}{7}\right)$, nous avons tendance à le prendre pour $\left(\frac{7}{5}\right)$, qui est défini sur des empreintes d'ordre moindre. Si nous voulons que $\left(\frac{10}{7}\right)$ soit pris pour sa véritable valeur, il faut recourir à un son indicateur, comme sur les figures (**159**) et (**160**) :

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{10}{7}\right) \cdots \rightarrow$$

s *f* *t*

(**159**)

$$\leftarrow \cdots\cdots \left(\frac{7}{4}\right) \cdots\cdots \rightarrow$$

$$\leftarrow \cdots\cdots \left(\frac{5}{2}\right) \cdots\cdots \rightarrow$$

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{10}{7}\right) \cdots \rightarrow$$

(160) *f* *t* *l*

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{7}{4}\right) \cdots \rightarrow$$

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{5}{2}\right) \cdots \rightarrow$$

Comme l'intervalle $\left(\frac{10}{7}\right)$ ne peut être confondu qu'avec $\left(\frac{7}{5}\right)$, il n'est même pas indispensable que les sons indicateurs *s* et *l* des figures (**159**) et (**160**) soient éloignés de manière à former l'état défini $\left(\frac{7}{4}\right)$. En effet, $\left(\frac{7}{5}\right)$ est constitué par les deux tierces $\left(\frac{6}{5}\right) + \left(\frac{7}{6}\right)$ cumulées, cet intervalle s'accommode du son intermédiaire *ré*, qui indique sa formation ; figure (**161**).

(**161**) *t* *r* *f*

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{7}{5}\right) \cdots \rightarrow$$

Le son *ré* est donc indicateur de l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$, mais il ne spécifie pas si la tierce $\left(\frac{7}{6}\right)$ est à la base ou au sommet de l'intervalle, entre *t* et *r* ou entre *r* et *f*. Sous ce rapport il y a donc ambiguïté.

Quant à $\left(\frac{10}{7}\right)$, qui est formé d'une tierce majeure cumulée avec $\left(\frac{8}{7}\right)$, l'intervalle est caractérisé par les formations (**162**) et (**163**) qui sont incompatibles avec la formation (**161**) qui correspond à $\left(\frac{7}{5}\right)$.

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{10}{7}\right) \cdots \rightarrow$$

(**162**) *f* *s* *t*

$$\leftarrow \cdot \left(\frac{8}{7}\right) \rightarrow \leftarrow \cdot \left(\frac{5}{4}\right) \cdots \rightarrow$$

$$\begin{array}{lccccc} & & \leftarrow\cdots\cdots & \left(\frac{10}{7}\right) & \cdots\cdots\rightarrow & \\ (163) & f & & l & & t \\ & & \leftarrow\cdots\left(\frac{5}{4}\right)\cdots\rightarrow & & \leftarrow\left(\frac{8}{7}\right)\cdot\rightarrow & \end{array}$$

Dans toutes ces formations et moyennant les sons indicateurs donnés, les intervalles peuvent être remplacés par leurs inflexions, nos sens ne manqueront pas, quand même, de leur attribuer les valeurs cotées sur les figures.

§ 11. — **Sons réels et sons repérés.**

Il résulte avec évidence des explications qui précèdent qu'il est possible d'exprimer des combinaisons musicales au moyen de sons inexacts ; pourvu que les intervalles consonnants soient toujours représentés par d'autres intervalles qui puissent être considérés comme des inflexions des intervalles consonnants ; pourvu que les intervalles dissonnants complets soient représentés dans leurs positions définies, par des inflexions des intervalles définis correspondants ; pourvu que les combinaisons à infléchir vers des positions non définies puissent être caractérisées par des sons indicateurs convenables.

Il est donc absolument essentiel, en musique, d'établir une distinction très nette entre les intervalles réels et les intervalles repérés, soit directement, soit par le moyen de sons indicateurs convenables. Les intervalles musicaux sont alors non pas les intervalles des sons réels, mais les intervalles repérés.

On se souvient que nous avons démontré l'impossibilité de se passer d'une échelle de tempérament moyen, à laquelle s'adapteraient indifféremment l'échelle diatonique ainsi que les échelles des cadences et des évolutions. Cette nécessité résultait de l'impossibilité de laisser divaguer les sons, au hasard des pivots choisis, en changeant ce que nous appellerons plus tard la tonalité. Les altérations pourraient devenir immenses et il n'y aurait pas de diapason stable dans une même exécution. Il est indispensable de se repérer à des sons fixes que seul le tempérament moyen peut donner.

On comprend aisément, au moyen des explications qui précèdent,

comment avec les sons inexacts du tempérament moyen, il soit possible d'obtenir des sons exactement repérés dans notre oreille.

La nécessité du tempérament moyen s'impose encore par une autre considération tirée des indications de ce chapitre lui-même. L'intervention de l'empreinte 7 a exigé l'extension de la zone d'équilibre, de part et d'autre de chaque empreinte, jusqu'à la valeur considérable $\left(\frac{36}{35}\right)$. Le tempérament moyen atténue cette erreur, en la répartissant sur tous les intervalles, elle se trouve alors réduite à fort peu de chose. Mais ce n'est pas encore tout. L'étude que nous avons faite des inflexions des intervalles dissonnants incomplets, au § 9, nous a fait voir que l'infléchissement de l'intervalle $\left(\frac{16}{15}\right)$, différence d'une tierce majeure et d'une quarte, pouvait aller exceptionnellement jusqu'à $\left(\frac{49}{48}\right)$. Une quarte ne pouvant jamais être confondue avec une tierce, il est de toute nécessité que cet intervalle $\left(\frac{49}{48}\right)$ ne soit pas négligé ; comme il est moindre que la tolérance, nous nous heurtons à une impossibilité qu'il nous faut bien signaler. Le tempérament moyen supprime cette difficulté. Cette combinaison $\left(\frac{49}{48}\right)$ correspond assurément à un cas exceptionnel, mais il fallait bien néanmoins l'envisager. Nous y reviendrons du reste, quand on sera plus familiarisé avec les difficultés des mouvements des accords.

En terminant nous tenons à préciser notre pensée pour qu'on n'attribue pas, aux indications que nous avons données, à l'égard du tempérament moyen, un sens absolu qu'elles n'ont pas. La nécessité d'un tempérament moyen s'impose en effet pour donner la fixité au diapason dans certains changements de tonalité qui se feraient sur des pivots fortement déviés ; mais cela ne signifie pas qu'il soit indispensable de n'émettre que les sons moyens ; absolument rien ne s'oppose à ce que l'on se serve des intervalles rigoureux, tant que les sons se meuvent sur l'ensemble des échelles d'une même tonalité.

CHAPITRE XI

Echelle diatonique. — Tempérament

§ 1. — **Echelle diatonique.**

L'échelle diatonique s'est révélée pour la première fois au chap. VIII, § 8, à propos des sillons creusés dans les cordes de l'oreille, par les empreintes des sons dérivant de mouvements d'accords parfaits. On tombe sur la même série de sons, en partant de l'accord majeur *d m s* ou de l'accord mineur *l d m*, il n'y a de différence que pour le son *r*, qui est plus bas de un comma *i*, dans la seconde combinaison que dans la première. L'échelle diatonique caractérise donc une série d'accords parfaits, au nombre de six, trois majeurs, trois mineurs, figure (**164**) :

(**164**)					*s*	*t*	*r* ±	*f*	*l*				
			d	*m*	*s*				*l*	*d*	*m*		
	f	*l*	*d*								*m*	*s*	*t*

Le *r* porte la mention ± pour indiquer les deux positions que peut prendre le son suivant qu'on le lie à *sol* et *si*, ou à *fa* et *la*.

L'échelle diatonique peut se déduire d'une notion plus générale ; elle doit permettre d'obtenir tous les intervalles qui résultent des empreintes que l'on peut percevoir distinctement. On a vu que les empreintes distinctes ne dépassent pas la dix-huitième, figure (**147**), chap. IX, § 10. D'un autre côté, les empreintes directes, en ce qui regarde la consonnance, se limitent à la sixième ; les empreintes directes supérieures sont nécessairement moins accusées et d'un usage forcément plus restreint. Bornons-nous donc à l'usage des empreintes signalées à la figure (**165**) :

(**165**)

18		16	15			12		10	9	8		6	5	4	3	2	1	0
⋮	.	⋮	⋮	.	.	⋮	.	⋮	⋮	I	.	⋮	I	I	I	I	I	I

Tous les nombres qui forment les numéros d'ordre, à part le facteur 2 qui ne modifie pas les intervalles généraux, sont constitués par les facteurs premiers 3 et 5, le premier pouvant être élevé à la puissance 2, savoir $3^2 = 9$.

Il est aisé de voir que les intervalles résultant des empreintes admises ne peuvent être exprimés que par des fractions dont les termes seraient formés par les diviseurs de $3^2 \times 5 = 45$. Prenons dès lors les sons conjugués de l'intervalle $\left(\frac{45}{1}\right)$, ils comprendront entre eux tous les intervalles possibles, c'est-à-dire figure (**166**) :

(**166**)

1	3	5	3^2	3×5	$3^2 \times 5$
f	*d*	*l*	*s*	*m*	*t*

Tous les sons de l'échelle diatonique se trouvent représentés, sauf le son *ré* qui est étranger et qui va s'ajouter après coup.

Nous devons, toutefois, avant de quitter ce §, faire une petite réserve. En disant, il y a un instant, que les sons à utiliser devaient constituer, en les prenant deux à deux, tous les intervalles possibles résultant des empreintes considérées, nous avons été trop loin en indiquant que toutes les fractions résultant des nombres de la figure (**166**) répondaient à la question. Il aurait fallu ajouter la réserve que chaque terme de fraction ne devrait pas dépasser 18, limites des empreintes distinctes. Tous les intervalles de la figure (**166**) répondent donc à la question, sauf un, celui qui s'étend de *f* à *t*, puisqu'il est défini par le nombre 45, plus grand que 18. Les sons *f* et *t* sont donc sans rela-

tion moyennant les empreintes considérées. C'est précisément la nécessité dans laquelle on s'est trouvé de créer cette relation qui a fait admettre accidentellement l'empreinte 7, quand cet intervalle se présente. L'intervalle caractérisé par 45 s'écrit $\left(\frac{64}{45}\right)$ et on a :

$$\left(\frac{64}{45}\right) = \left(\frac{64}{63}\right) + \left(\frac{63}{45}\right) = j + \left(\frac{7}{5}\right)$$

c'est ce que nous avons mentionné à la figure (**144**), du chap. IX, § 6.

§ 2. — **Symétrie, axes.**

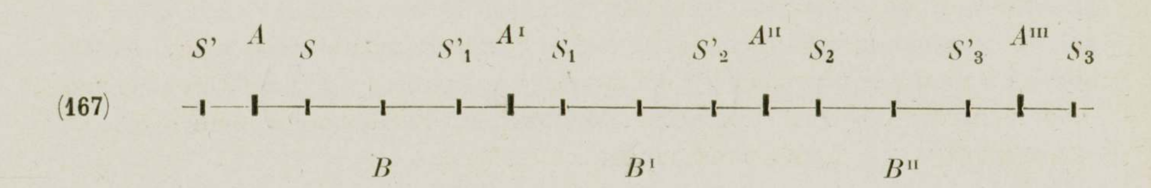
Si on considère la figure (**166**), on constate que tous les sons se présentent en formant des intervalles symétriques. Les sons, conjugués deux à deux, sont à égale distance des extrêmes, savoir :

f	est conjugué et symétrique de		*t*
d	—	—	*m*
l	—	—	*s*

Il ne faut pas perdre de vue que les combinaisons musicales sont nécessairement périodiques, et que cette périodicité correspond à l'octave. Nous allons démontrer que s'il existe un axe de symétrie, ainsi qu'on vient de le faire voir, il doit s'en trouver nécessairement une infinité espacés entre eux d'une octave.

Soit S un son qui se reproduit périodiquement d'octave en octave, en S_1, S_2, etc. On voit, sur la figure (**167**), que s'il existe un son S^1 symétrique de S par rapport à un axe A ; le son S'_1 sera symétrique de S^1 relativement à l'axe

A^{I} à une octave au-dessus de A ; le son S'_2 sera symétrique de S_2 relativement à l'axe A^{II} à deux octaves au-desssus de A et ainsi de suite. Il y a donc une série d'axes A, A^{I}, A^{II}, etc., espacés entre eux d'une octave.



Bien plus, nous allons faire voir qu'au milieu de l'intervalle compris entre deux axes consécutifs tels que A et A^{I}, il y a nécessairement un autre axe B, qui, lui aussi, se reproduira d'octave en octave sur les points B^{I}, B^{II}, etc. En effet, à tout son S suivant l'axe A, correspond un son S^{I} symétrique ; la périodicité entraîne l'existence de S'_{I} à une octave au-dessus de S^{I} ; or ce son S'_{I} est symétrique de S relativement à la position B, donc cette position correspond à un nouvel axe de symétrie.

Pour nous rendre compte de la position de ces deux axes moyennant les sons de la figure (**166**), nous allons considérer les états généraux de tous ces sons, conformément à ce qui est mentionné (**168**) :

(**168**)

	A			B			A^{I}			B^{I}			A^{II}			B^{II}			A^{III}	
d	|	*m* *f*	*s*	⋮	*l* *t*	*d*	|	*m* *f*	*s*	⋮	*l* *t*	*d*	|	*m* *f*	*s*	⋮	*l* *t*	*d*	|	*m*

On constate une série d'axe d'un premier type, au milieu de la tierce majeure qui sépare deux états particuliers consécutifs de *do* et *mi*. Ces axes sont marqués A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, etc. On constate une série d'axes du second type, au milieu de l'intervalle $\left(\frac{10}{9}\right)$ qui sépare deux états particuliers consécutifs de *sol* et *la*. Ces axes sont marqués B, B^{I}, B^{II}, etc.

§ 3. — **Premier axe, son de liaison.**

Si on considère tous les sons de l'échelle mentionnés à la figure (**168**), on constate qu'ils font tous entre eux, deux à deux, soit un intervalle consonnant, soit la différence ou la somme de deux intervalles consonnants. Il n'y a d'exception que pour les sons conjugués *si* et *fa*.

Considérons ces deux sons, à l'égard de l'axe de symétrie du type A, et remarquons que l'intervalle total de *si* à *fa*, en montant, dans l'état particulier le plus rapproché des deux sons, est $\left(\frac{64}{45}\right)$. Envisageons dès lors un son placé à une tierce mineure au-dessus de *si*, en même temps qu'un autre son à une tierce mineure au-dessous de *fa* ; ces deux sons seront respectivement à des distances du son *si* égales à :

$$\left(\frac{6}{5}\right) \text{ d'une part, et } \left(\frac{64}{45}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{32}{27}\right)$$

Ils seront donc séparés par l'intervalle :

$$\left(\frac{6}{5}\right) - \left(\frac{32}{27}\right) = \left(\frac{81}{80}\right) = i$$

qui caractérise le comma mineur. Ces deux sons ne sont pas autre chose que ceux que nous avons appelés $\underset{+}{r'}$ et $\underset{-}{r'}$ au § 1. Le premier $\underset{+}{r'}$ est en relation avec *sol* et *si*, au moyen d'intervalles consonnants. Le second est en relation avec *la* et *fa*, au moyen d'intervalles consonnants. On fond ces deux sons en un seul $\underset{\pm}{r'}$ et on considère qu'il sert à établir une liaison qui n'existait pas entre *si* et *fa*, au moyen d'intervalles consonnants ; le même son unit *sol* et *la* avec la même approximation i.

Le son ainsi obtenu *ré* peut donc s'appeler son de liaison. Il constitue en quelque sorte le premier axe de symétrie.

§ 4. — **Intervalles diatoniques.**

On nomme intervalle diatonique tout intervalle que l'on constate entre deux sons qui portent sur les degrés de l'échelle diatonique. On le désigne d'après le nombre des sons que l'on peut compter entre les extrêmes, par degrés conjoints (c'est-à-dire états particuliers serrés et contigus), les extrêmes compris. Les intervalles se désignent d'après ce nombre :

Seconde, tierce, quarte, quinte, sixte, septième, octave, neuvième, dixième, onzième, etc. C'est là l'origine des noms que nous avons donnés depuis un certain temps, pour l'octave et les intervalles consonnants.

Le plus important des intervalles diatoniques est naturellement l'octave, qui, comme nous le savons, ne constitue pas, à proprement parler, un intervalle : c'est la période qui équivaut en quelque sorte à l'unisson.

Vient ensuite, dans l'ordre des intervalles primaires, la quinte $\left(\frac{3}{2}\right)$ Tandis que l'octave se présentait nécessairement en regard de tout son de l'échelle, l'intervalle de quinte $\left(\frac{3}{2}\right)$ ne se présente plus que pour tous ces sons moins un, étant entendu qu'il faut faire en quelque sorte un décrochement du comma *i*, quand on passe par le son de liaison $\frac{r}{\pm}$. L'intervalle de *si* à *fa* en montant qui présente cinq sons, mais qui est moindre que $\left(\frac{3}{2}\right)$ se nommera quinte mineure.

Vient ensuite la quarte $\left(\frac{4}{3}\right)$, qui est une combinaison de l'octave et de la quinte et qui, par suite, en raison de la périodicité, se place sur les mêmes degrés. Toutes les quartes ont la valeur $\left(\frac{4}{3}\right)$, sauf de *fa* à *si* en montant, on la nommera quarte majeure, parce qu'elle est plus grande que $\left(\frac{4}{3}\right)$.

Constatons en passant que deux intervalles qui sont le renversement l'un de l'autre, comme la quinte et la quarte, lorsqu'on fait la somme des nombres caractéristiques, forment le total 9 ; ainsi :

Quinte et quarte	donnent	$5 + 4 = 9$
Tierce et sixte	—	$3 + 6 = 9$
Seconde et septième	—	$2 + 7 = 9$

Il n'y a pas lieu d'envisager les intervalles de neuvième, dixième, etc.,

qui sont des redoublements d'intervalles normaux. La différence des nombres des intervalles correspondants donnera toujours 7 ; ainsi :

Neuvième et seconde	donnent	9 — 2 = 7
Dixième et tierce	—	10 — 3 = 7
Onzième et quarte, etc.	—	11 — 4 = 7, etc.

Ces désignations ne sont guères usitées au delà de la neuvième.

Il est utile de remarquer ici que les intervalles redoublés n'ont pas, à proprement parler, de renversement. Cette expression ne peut s'appliquer qu'à un intervalle normal. Soit un son S et un son S' qui font entre eux un intervalle normal, on appelle renversement de l'intervalle $S\,S'$ celui qui est formé entre le son S et un son S'_i à une octave au-dessous de S'. On voit dès lors que, si l'intervalle en S et S' était supérieur à une octave, l'intervalle S S'_i obtenu par le même procédé, serait l'intervalle normal, en raison des propriétés de périodicité,

S'_i S'

Intervalle normal
et renversement.

S

S'_i S'

Intervalle redoublé
et intervalle normal.

S

Ainsi, en appliquant à un intervalle redoublé la même opération que celle qui a donné le renversement de l'intervalle normal, on tombe sur l'intervalle normal correspondant à l'intervalle redoublé.

Après l'intervalle primaire de quarte vient celui de tierce majeure $\left(\frac{5}{4}\right)$ qui se pose de *f* à *l*, de *d* à *m* et de *s* à *t*.

Vient ensuite la tierce mineure $\left(\frac{6}{5}\right)$ qui se pose de $\underline{r}$ à *f*, de *l* à *d*, de *m* à *s*, et de *t* à $\underset{+}{r}$.

Il y a enfin la seconde qui prend trois valeurs :

1° $\left(\frac{9}{8}\right)$, différence de quinte et quarte, on l'appelle ton majeur.

2° $\left(\frac{10}{9}\right)$, différence de quarte et tierce mineure, on l'appelle ton mineur.

Le ton majeur et le ton mineur sont des infléchissements l'un de l'autre. Ils forment en quelque sorte la seconde majeure.

3° $\left(\frac{16}{15}\right)$, différence de quarte et tierce majeure, on l'appelle demi-ton diatonique. Cet intervalle est également la différence entre la tierce mineure $\left(\frac{6}{5}\right)$ et le ton majeur $\left(\frac{9}{8}\right)$; il forme en quelque sorte la seconde mineure.

Nous ne parlons pas des sixtes et des septièmes qui correspondent en définitive aux tierces et aux secondes. Il suffit de constater que ces intervalles sont majeurs quand leurs correspondants sont mineurs et inversement.

§ 5. — **Intervalle chromatique. — Dièze et bémol.**

Considérons un accord parfait majeur contenu dans l'échelle, soit par exemple

$$f \quad l \quad d$$

que nous prenons dans la position neutre. Cet accord comporte une tierce majeure de f à l et une tierce mineure de l à d. Transformons-le en un accord mineur sans changer les sons principaux, fondamentale et dominante, mais en altérant la médiante. Il nous suffira d'abaisser le son l d'une quantité égale à la différence entre la tierce majeure et la tierce mineure :

$$\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{25}{24}\right)$$

Nous obtenons ainsi un nouvel accord $f\ l_1\ d$, dans lequel le son l_1 est plus bas que le son l de $\left(\frac{25}{24}\right)$. L'intervalle de f à l_1 doit conserver son caractère de

tierce, puisqu'il forme l'intervalle de tierce mineure ; de même, l'intervalle de l_1 à *d* doit conserver son caractère de tierce, puisqu'il forme l'intervalle de tierce majeure. En suivant les degrés de l'échelle, nous devons donc conserver trois sons de *f* à l_1 et trois sons de l_1 à *do*. Il est donc indispensable que le son l_1 ainsi altéré, se nomme encore *la*, mais pour qu'il n'y ait pas confusion, l'altération de $\left(\frac{25}{24}\right)$ en descendant sera marquée par le signe ♭, appelé bémol.

L'accord	*f*	*l*	*d*	majeur.
devient	*f*	$\underset{\flat}{l}$	*d*	mineur.

Si, au lieu de considérer un accord majeur comme *f l d*, on était parti d'un accord mineur, en se proposant de le transformer en accord majeur par une altération analogue, il aurait fallu hausser le son de la médiante de $\left(\frac{25}{24}\right)$, en lui conservant son nom pour garder aux intervalles leur caractère de tierces. L'altération est indiquée par le signe ♯, appelé dièze.

L'accord	*m*	*s*	*t*	mineur.
devient	*m*	$\underset{\sharp}{s}$	*t*	majeur.

Cette modification des sons, par ♭ ou ♯, qui conserve au son le nom qu'il porte sur l'échelle, se nomme altération chromatique. L'intervalle chromatique se place donc toujours sur deux sons qui portent le même nom. Cet intervalle $\left(\frac{25}{24}\right)$ a été signalé sur la figure (**137**) du chap. IX, au moyen de l'empreinte douteuse. On le nomme souvent aussi demi ton chromatique.

§ 6. — **Deuxième axe. — Axe modal. — Comma anharmonique.**

Considérons les deux sons obtenus au § précédent : $\underset{\flat}{l}$ à une tierce majeure au-dessous du *do*, et le $\underset{\sharp}{s}$ à une tierce majeure au-dessus du *mi*. En

combinant ces deux sons, avec *do* et *mi* qui servent à les repérer, nous obtenons la figure (**169**) :

$$\longleftarrow \cdots\cdots \left(\frac{2}{1}\right) \cdots\cdots \longrightarrow$$

(**169**) $\quad d \qquad m \qquad \underset{\sharp}{s}\ \underset{\flat}{l} \qquad d$

$$\leftarrow \left(\frac{5}{4}\right) \rightarrow\leftarrow \left(\frac{5}{4}\right) \rightarrow K \leftarrow \left(\frac{5}{4}\right) \rightarrow$$

dans laquelle les sons extrêmes marqués *d* sont espacés d'une octave, les sons *d m*, *m* $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$ *d*, espacés de tierces majeures. La somme de ces trois tierces majeures étant plus petite qu'une octave, il reste, entre les deux sons $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$, un petit intervalle *K*, dont la valeur $\left(\frac{128}{125}\right)$ se calcule ainsi :

$$K = \left(\frac{2}{1}\right) - 3\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{2}{1}\right) - \left(\frac{5^3}{4^3}\right) = \left(\frac{128}{125}\right)$$

Cet intervalle *K* est moindre que la tolérance, puisqu'il est compris entre $\left(\frac{126}{123}\right) = \left(\frac{42}{41}\right)$ et $\left(\frac{129}{126}\right) = \left(\frac{43}{42}\right)$. Les deux sons $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$ pourraient donc être confondus si l'on avait égard qu'à la faculté *Z*. Mais en admettant cette confusion on diviserait la période d'octave en trois parties égales, formées chacune par un intervalle original $\left(\frac{5}{4}\right)$, il y aurait commune mesure entre la période qui peut en résulter et la période obligatoire d'octave ; l'indication de ces deux périodes est incompatible. Les deux sons $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$ ne peuvent donc pas être confondus. C'est pour cela que nous avons tant insisté dans le § précédent sur la nécessité de conserver les trois sons des intervalles de tierces après l'altération par ♭ ou par ♯. C'est le procédé qu'emploie la musique pour éviter l'identification de deux sons très voisins qui ne doivent pas être confondus, à cause de l'incompatibilité.

L'intervalle *K* se nomme comma anharmonique. Il sépare les deux sons $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$ qui définissent en quelque sorte le second axe, dit axe modal.

§ 7. — **Intervalles anharmoniques.**

Considérons l'intervalle compris entre $\underset{\sharp}{s}$ et le *do* supérieur sur la figure (**169**) ; cet intervalle est égal à $\left(\frac{32}{25}\right)$; c'est une inflexion de la tierce majeure ; mais l'intervalle ne doit jamais être confondu avec cette tierce majeure afin d'éviter l'incompatibilité que nous avons signalée. On dit alors que cet intervalle est une quarte, puisqu'il correspond à quatre sons consécutifs $\underset{\sharp}{s}$ l t d, mais cette quarte qui est moindre que $\left(\frac{4}{3}\right)$ de l'intervalle chromatique $\left(\frac{25}{24}\right)$, s'appellera quarte diminuée. La quarte diminuée est donc une inflexion de la tierce majeure ; comme elle ne porte pas sur les mêmes degrés de l'échelle, on dit que c'est une inflexion anharmonique. L'intervalle de quarte diminuée forme ce qu'on appelle un intervalle anharmonique ; il ne faut pas la confondre avec la quarte infléchie, $\left(\frac{21}{16}\right)$ par exemple, qui se confond avec la quarte et qui pose sur les mêmes degrés de l'échelle.

Au lieu de définir les deux sons $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$ par les tierces majeures qui les séparent des sons *mi* et *do*, nous pouvons les rattacher aux sons *si* et *fa*, contenus dans les accords altérés du § 5. On peut constituer ainsi le schéma (**170**) :

(**170**)

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{2}{1}\right) + i \cdots\cdots\cdots \rightarrow$$

$$\underset{-}{r} \qquad f \qquad \underset{\sharp}{s}\ \underset{\flat}{l} \qquad t \qquad \underset{+}{r}$$

$$\leftarrow \cdot \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \rightarrow \leftarrow \cdot \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \rightarrow$$

$$\leftarrow \cdots \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \rightarrow \leftarrow \cdot \left(\frac{6}{5}\right) \cdot \rightarrow$$

$$\rightarrow K \leftarrow$$

Cette figure montre que quatre tierces mineures, moins le comma anharmonique K, forment un intervalle de une octave plus un comma i ; elle met en évidence une inflexion de la tierce mineure de f à $\underset{\sharp}{s}$ et de $\underset{\flat}{l}$ à t dont la valeur est $\left(\frac{75}{64}\right)$. Mais cette inflexion de la tierce mineure ne doit pas être confondue avec elle pour ne pas créer l'incompatibilité dont nous avons parlé au § précédent. C'est dans ce but qu'on caractérise l'intervalle par d'autres sons. L'intervalle

de f à $\underset{\sharp}{s}$ ou de $\underset{\flat}{l}$ à t n'est pas une tierce, mais une seconde augmentée ; c'est encore un intervalle anharmonique, car l'inflexion de la tierce mineure à la seconde augmentée ne se fait pas sur les mêmes degrés de l'échelle. L'incompatibilité qu'on évite ainsi est celle qui résulterait de la division de l'octave en quatre parties qui seraient égales chacune à une tierce mineure.

D'une manière générale, tout intervalle mineur diminué est une inflexion anharmonique de l'intervalle majeur d'unité moindre : quarte diminuée, inflexion de tierce majeure. Tout intervalle majeur augmenté est une inflexion anharmonique de l'intervalle mineur d'unité supérieure : seconde augmentée, inflexion de tierce mineure. Les intervalles augmentés surpassent les intervalles majeurs correspondants de l'intervalle chromatique. Les intervalles diminués sont inférieurs aux intervalles mineurs correspondants de l'intervalle chromatique.

La différence entre les intervalles augmentés ou diminués et leurs inflexions est égal au comma anharmonique K.

La différence entre un intervalle diatonique majeur et l'intervalle de même ordre mineur est égal à l'intervalle chromatique.

Remarque. — Avant de donner le tableau complet des intervalles, il est essentiel de dire un mot des inflexions du comma i, qui résultent du décalage du son de liaison. Il suffit de citer les exemples suivants :

Considérons par exemple le son f de l'échelle et rapportons-le au son $\underset{+}{r}$ pour former avec ce son une tierce mineure, le son f doit être haussé de i. Dans ces conditions, l'intervalle de f à s qui, sur l'échelle est $\left(\frac{9}{8}\right)$ devient $\left(\frac{10}{9}\right)$. De la même manière, rapportant le t à $\underset{-}{r}$, on verrait qu'il faut l'abaisser de i pour conserver la tierce $\left(\frac{6}{5}\right)$. — Les mêmes observations peuvent se faire à l'égard de tous les sons de l'échelle — cherchons à obtenir le *fa dièze* qui doit faire avec *sol* l'intervalle diatonique $\left(\frac{16}{15}\right)$, il faut pour cela repérer les sons de l'accord $r\ f\ l$ au son $\underset{+}{r}$, qui est défini par *sol*, savoir :

$$\underset{+}{r} \qquad \underset{+}{f} \qquad \underset{+}{l}$$

C'est alors que, cette inflexion étant faite, on altère la médiante f pour obtenir $\underset{\sharp}{f}$, le mouvement $\left(\frac{25}{24}\right)$ suffit. On a en effet :

$$\left(\frac{10}{9}\right) = \left(\frac{16}{15}\right) + \left(\frac{25}{24}\right)$$

$$\left(\frac{9}{8}\right) = i + \left(\frac{16}{15}\right) + \left(\frac{25}{24}\right)$$

On verrait de la même manière que, dans toute altération chromatique portant sur l'intervalle $\left(\frac{9}{8}\right)$, celui-ci doit être préalablement infléchi à $\left(\frac{10}{9}\right)$.

§ 8. — **Tableau général des intervalles.**

Seconde mineure	*s* à *l*♭	Demi-ton diatonique.
Seconde diminuée	*s*♯ à *l*♭	Comma anharmonique.
Seconde majeure	*s* à *l*	Ton.
Seconde augmentée	*f* à *s*♯	Inflexion anharmonique de tierce mineure.
Tierce mineure	*f* à *l*♭	
Tierce diminuée	*f*♯ à *l*♭	Inflexion anharmonique du ton.
Tierce majeure	*f* à *l*	
Tierce augmentée	*f* à *l*♯	Inflexion anharmonique de la quarte.
Quarte (juste)	*s* à *d*	
Quarte diminuée	*s* à *d*♭	Inflexion anharmonique de la tierce majeure.
Quarte augmentée	*s* à *d*♯	Le même que de *f* à *t* en montant.
Quinte (juste)	*d* à *s*	
Quinte diminuée	*d*♯ à *s*	Le même que de *t* à *f* en montant.
Quinte augmentée	*d* à *s*♯	Inflexion anharmonique de la sixte mineure.
etc., etc.		

C'est avec cette convention sur la notation des inflexions anharmoniques, que le solfège permet d'en éviter la confusion, et évite de signaler les incompatibilités qui résulteraient de l'indication d'autres périodes que celle d'octave.

§ 9. — **Changements d'échelle.**

L'échelle diatonique peut être considérée comme formée de 6 accords, trois majeurs et trois mineurs, figure (**164**). Considérons la formation ascendante, figure (**171**).

s t r

(**171**) *d m s*

f l d

Il est facile de concevoir qu'il est possible de constituer une nouvelle échelle, en formant trois accords parfaits superposés qui, au lieu de commencer par l'accord *f l d*, commenceraient par *d m s*, figure (**172**) :

r *f*♯ *l*

(**172**) *s t r*

d m s

Mais alors, pour que le troisième accord soit majeur, il faut élever d'un demi-ton chromatique la médiante de l'accord *r f l*. On peut de même constituer une troisième échelle en partant de *s t r* et ainsi de suite.

Si l'on désigne chaque échelle par le nom du son fondamental de l'accord générateur, on voit que les diverses échelles obtenues successivement correspondent à :

d s r l m t f♯ *d*♯

Les sons altérés dans les échelles successives, à partir de la seconde, sont :

f♯ *d*♯ *s*♯ *r*♯ *l*♯ *m*♯ *t*♯

On se borne là dans la pratique. On pourrait aller plus loin avec des doubles dièzes.

Si on considère de la même manière la formation descendante, figure (**173**)

	t	*s*	*m*				
(**173**)			*m*	*d*	*l*		
					l	*f*	*r*

En partant de l'accord *m d l*, on obtiendrait une autre échelle, de la façon suivante :

	m	*d*	*l*				
(**174**)			*l*	*f*	*r*		
					r	*t*♭	*s*

et ainsi de suite. Les échelles successives obtenues seraient celles de

d *f* *t*♭ *m*♭ *l*♭ *r*♭ *s*♭ *d*♭

avec les altérations

t♭ *m*♭ *l*♭ *r*♭ *s*♭ *d*♭ *f*♭

Tous ces faits sont couramment indiqués dans tous les solfèges, nous n'en parlons que pour assurer la continuité de notre exposé.

§ 10. — **Altérations chromatiques directes**

Quand on connaît les sons de l'échelle diatonique, on peut se demander quels sont les sons qui peuvent recevoir l'altération chromatique. Ce sont ceux qui peuvent constituer des médiantes d'accords parfaits. Les altérations par ♯

portent donc sur les médiantes des accords mineurs *r f l*, *l d m*, *m s t*, savoir : $\underset{\sharp}{f}$, $\underset{\sharp}{d}$, $\underset{\sharp}{s}$. Les altérations par ♭ portent donc sur les médiantes des accords majeurs *f l d*, *d m s*, *s t r*, savoir : $\underset{\flat}{l}$, $\underset{\flat}{m}$, $\underset{\flat}{t}$.

On peut encore admettre à la rigueur que l'accord mixte *t r f* peut se transformer en accord majeur ou mineur sur les pivots *t* et *f*, en donnant $t\ \underset{\sharp}{r}\ \underset{\sharp}{f}$ et $\underset{\flat}{t}\ \underset{\flat}{r}\ f$. On obtiendrait ainsi les sons $\underset{\sharp}{r}$ et $\underset{\flat}{r}$.

En dehors de ces modifications, aucune altération chromatique ne peut être abordée directement. Exemple : Le son *sol* ne peut pas être affecté directement de ♭. Il faudrait pour cela que ce son *s* fut la médiante d'un accord parfait majeur. Or cet accord majeur est $\underset{\flat}{m}\ s\ \underset{\flat}{t}$. Les sons $\underset{\flat}{m}$ et $\underset{\flat}{t}$ n'étant pas sur l'échelle, l'altération $\underset{\flat}{s}$ manque de base, on ne peut l'obtenir qu'après avoir connu au préalable, le $\underset{\flat}{m}$ et le $\underset{\flat}{t}$.

Il suit de là que l'échelle de *do* n'a de parenté directe qu'avec les quatre suivantes, figure (**175**).

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & d & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & & \\
(\mathbf{175}) & \underset{\flat}{l} & \underset{\flat}{m} & \underset{\flat}{t} & f & \cdot & s & r & l & m \\
 & & & & & \cdot & & & & \\
 & & & & & \cdot & & & &
\end{array}
$$

car ces échelles ne comportent précisément que des altérations chromatiques qu'on peut obtenir directement.

§ 11. — Expression approchée des intervalles.

Nous désignons les intervalles par les lettres suivantes :

K comma anharmonique $\left(\frac{128}{125}\right)$.

i comma mineur $\left(\frac{81}{80}\right)$.

ω octave $\left(\frac{2}{1}\right)$.

Q quinte $\left(\frac{3}{2}\right)$.

q quarte $\left(\frac{4}{3}\right)$.

T tierce majeure $\left(\frac{5}{4}\right)$.
T^1 tierce mineure $\left(\frac{6}{5}\right)$.
S ton majeur $\left(\frac{9}{8}\right)$.
S^1 ton mineur $\left(\frac{10}{9}\right)$.
θ demi ton diatonique $\left(\frac{16}{15}\right)$.
θ^1 demi ton chromatique $\left(\frac{25}{24}\right)$.

Considérons d'abord la tierce majeure comparée à l'octave, figure (**169**), on obtient :

$$\omega = 3\ T + K$$

Considérons de même la figure (**170**), on obtient :

$$\omega + i = 4\ T^1 - K$$

De ces relations on tire :

(**176**) $$T = \frac{\omega}{3} - \frac{K}{3}$$

(**177**) $$T^1 = \frac{\omega}{4} + \frac{i + K}{4}$$

On sait que la quinte est égale à la somme $T + T^1$, on a donc :

(**178**) $$Q = \frac{7\ \omega}{12} + \frac{3\ i - K}{12}$$

La quarte est égale à l'octave moins une quinte :

(**179**) $$q = \frac{5\ \omega}{12} \quad \frac{3\ i - K}{12}$$

On sait aussi que $S = Q - q$

$$S^1 = q - T^1$$

$$\theta = q - T$$

$$\theta^1 = T - T^1$$

Il vient alors :

(180) $$S = \frac{\omega}{6} + \frac{3\,i - K}{6}$$

(181) $$S = \frac{\omega}{6} - \frac{3\,i + K}{6}$$

(182) $$\theta = \frac{\omega}{12} + \frac{5\,K - 3\,i}{12}$$

(183) $$\theta^1 = \frac{\omega}{12} - \frac{3\,i + 7\,K}{12}$$

On vérifie que $\theta - \theta^1 = K$.

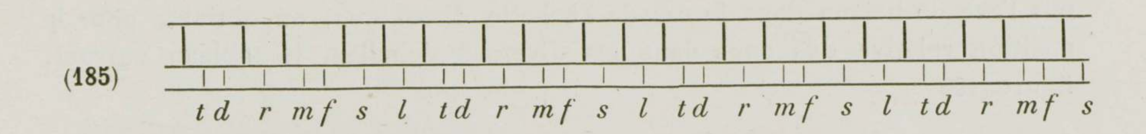
§ 12. — **Tempérament. — Clavier.**

Toutes les expressions de (176) à (183) peuvent être considérées comme des inflexions des intervalles approchées que nous représentons avec l'indice un.

(184) $$\left\{ \begin{array}{llll} Q_1 = \dfrac{7\,\omega}{12} & q_1 = \dfrac{5\,\omega}{12} & T_1 = \dfrac{\omega}{3} & T'_1 = \dfrac{\omega}{4} \\ S_1 = \dfrac{\omega}{6} & S'_1 = \dfrac{\omega}{6} & \theta_1 = \dfrac{\omega}{12} & \theta'_1 = \dfrac{\omega}{12} \end{array} \right.$$

Elles correspondent à un nombre entier de parties de l'octave divisé en douze parties égales.

Prenons sur une ligne, figure (**185**) des octaves successives que nous divisons chacune en douze parties égales. Les sons de l'échelle, conformément aux valeurs approchées (**184**) seront représentés par les traits inférieurs *d r m f s*, etc. Les divisions intermédiaires sont représentées par les traits fort supé-

(**185**) 

rieurs, il correspondent aux altérations chromatiques. Cette combinaison forme ce qu'on appelle un clavier tempéré. On adopte les sons qu'il fournit comme sons réels. Comme les intervalles sont tous des inflexions des intervalles exacts, nos sens les repèrent conformément aux explications qui ont été données au chapitre précédent, notamment au § 11. Les altérations chromatiques, bien que représentées par le même son réel, se distinguent néanmoins l'une de l'autre en raison des sons indicateurs qui l'accompagnent.

Nous avons insisté sur la nécessité absolue qu'il y avait à avoir un tempérament fixe. Nous voici avec ce qui précède en possession de l'outillage définitif de la musique. Cela n'empêche pas, avec l'usage des instruments non tempérés, de recourir pour certains accords à des sons ayant entre eux les rapports exacts, mais comme nous l'avons démontré, le tempérament est indispensable pour assurer la fixité du diapason.

La tierce majeure est représentée par une valeur intermédiaire entre $\left(\frac{5}{4}\right)$ et $\left(\frac{9}{7}\right)$, la tierce mineure par une valeur comprise entre $\left(\frac{7}{6}\right)$ et $\left(\frac{6}{5}\right)$. Les accords parfaits restent toujours parfaitement caractérisés, tout en facilitant les inflexions harmoniques des intervalles consonnants.

Si on prend l'octave pour unité d'intervalles, l'erreur sur les divers intervalles sera la suivante :

$$Q_1 = Q - 0{,}00163 = 0{,}58333$$
$$q_1 = q + 0{,}00163 = 0{,}41667$$
$$T_1 = T + 0{,}01140 = 0{,}33333$$
$$T'_1 = T' - 0{,}01303 = 0{,}25000$$
$$S_1 = S - 0{,}00326 = 0{,}16667$$
$$S'_1 = S' + 0{,}01466 = 0{,}16667$$
$$S''_1 = S'' - 0{,}02598 = 0{,}16667$$

Avec l'octave pour unité, les commas ont pour valeur

$$i = 0{,}017922$$
$$j = 0{,}022720$$
$$i + j = 0{,}040642$$

Si on identifie tous les sons *ré* des diverses échelles, en prenant toutefois l'axe de liaison dans le cas de l'échelle diatonique, on obtient, pour la position relative des sons dans les diverses échelles, le tableau suivant, figure (**186**) :

		Tempérament	Echelle diatonique	Cadences	Evolutions
	s	+ 0,41667	+ 0,42400	0,41504	0,41504
	f	+ 0,25000	+ 0,25408	0,22239	0,26303
	m	+ 0,16667	+ 0,16096	0,15201	0,16992
(**186**)	*r*	0,0 (axe)	0,0	0,0	0,0
	d	-- 0,16667	— 0,16096	— 0,16992	— 0,15201
	t	— 0,25000	— 0,25408	— 0,26303	— 0,22239
	l	— 0,41667	— 0,42400	— 0,41504	— 0,41504

Ce tableau montre bien comment les sons du tempérament moyen s'intercalent entre les sons des diverses échelles, et en atténuant les erreurs. Les sons moyens obtenus servent surtout à l'identification des sons dans les divers changements qu'on peut faire subir aux échelles ; à cet égard, ils constituent pour tout cet ensemble de sons immensément variés la véritable moyenne.

§ 13. — **Polygone des tonalités.**

Sur une circonférence dont le périmètre est égal à une octave, prenons les divisions qui correspondent au dodécagone régulier. Ces divisions représentent tous les sons du clavier.

Comme les quintes et les quartes représentent 7 ou 5 de ces divisions, 5 et 7 étant d'ailleurs les seuls nombres premiers et inférieurs à 12, en joignant les points de division de 7 en 7, ou de 5 en 5, les quintes et les quartes embrasseront, l'une comme l'autre, les divers côtés du dodécagone étoilé. Si on prend six côtés consécutifs de ce polygone, les sommets corespondants représenteront les sons d'une tonalité quelconque. On peut déduire de là les faits déjà signalés au § 9.

§ 14. — **Notation et solfège.**

Les échelles ont engendré la notation musicale qui indique, dans un tableau à double entrée, les mouvements mélodiques suivant les déplacements verticaux repérés sur une portée, et les mouvements rhythmiques suivant les déplacements horizontaux. Nous ne donnons ces indications que pour mémoire, c'est l'objet du solfège.

CHAPITRE XII

Les Modes

§ 1. — Origine de la distinction des modes.

L'origine de la distinction des modes résulte de l'opposition qui existe entre les diverses notions que nous avons données, savoir :

— Support réel	opposé au	— Support virtuel.
— Mouvement direct	—	— Mouvement indirect.
— Cadence	—	— Evolution.
— Repos	—	— Réplique.
— Echelles des cadences	—	— Echelles des évolutions.
— Accords majeurs	—	— Accords mineurs.
— Echelle diatonique, déduite de l'accord majeur, avec $\underset{+}{r}$	—	— Echelle diatonique déduite de l'accord mineur, avec $\underset{-}{r}$.
— Succession montante :	—	— Succession descendante.
d r m f s l t d → etc.		← *m f s l t d r m* etc.

Il y a en quelque sorte symétrie complète entre la série des idées que nous venons d'évoquer parallèlement.

§ 2. — **Le mode majeur d'après les cadences.**

Considérons l'échelle des cadences, dans laquelle le son préalable est *sol*. Opérons les dédoublements successifs déjà indiqués au chap. VII, § 15, figure (**115**). Nous avons donné le caractère des mouvements successifs obtenus, qui, par évolutions et cadences successives partielles, aboutissent finalement au repos définitif sur le son de cadence *do* sur lequel il y a arrêt complet. Ce mouvement caractérise entièrement ce qu'on nomme le mode majeur. Le pivot du mouvement *sol*, combiné avec le *do* où l'on s'arrête et avec le sillon du son *mi*, par lequel on est passé, définit l'accord parfait majeur de *do*. C'est cet accord parfait qui définit l'état harmonique définitif de ce repos. Cet accord est majeur, par suite le mode correspondant est également majeur.

Le mode majeur est donc exclusivement caractérisé par des mouvements directs de cadence qui aboutissent sur un son définitif qu'on appelle tonique.

§ 3. — **Tonique — Dominante — Sous-dominante — Sensible — Médiante.**

La tonique est formée par le son vers lequel convergent toutes les cadences. Les repos intermédiaires n'étaient des repos que parce qu'ils accusaient des cadences partielles portant toutes sur la tonique. La tonique reçoit aussi le mouvement de chute venant du son *mi*, il n'y a donc d'autre repos que la tonique seule.

La dominante est formée par le son préalable d'où l'on part pour former la cadence.

La sensible *t* et la sous-dominante *f* sont formées par les sons qui, en montant, forment la cadence élidée pour le premier, et en descendant la cadence élidée partielle pour le second.

La médiante qui reçoit la principale cadence partielle est le son d'où part la chute qui aboutit à la tonique.

Tels sont les caractères essentiels du mode majeur.

La cadence partielle secondaire qui passe par $t_\flat$ sera éliminée, comme on le verra au § suivant, parce que ce son est étranger à l'échelle diatonique.

§ 4. — Mode majeur avec les simples accords parfaits. — Cadence majeure.

L'échelle des cadences n'est pas seule à caractériser le mode majeur. Les mouvements d'accords parfaits sur l'échelle diatonique peuvent suffire à définir ce mode.

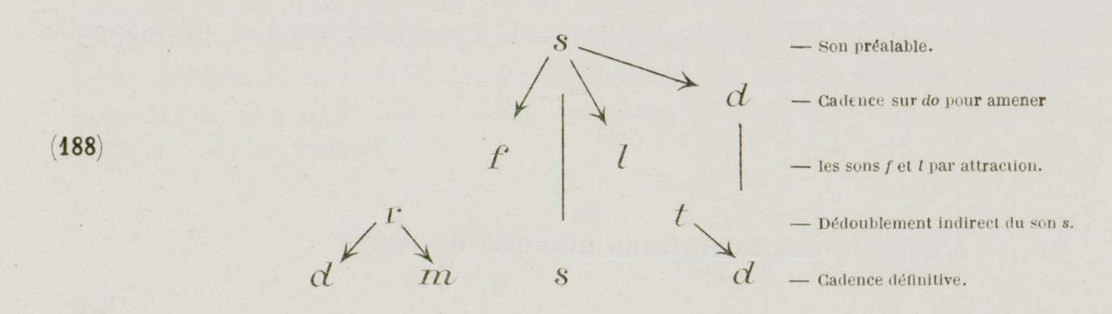
Reportons-nous à la figure (**115**), nous voyons à la quatrième ligne, les sons *r* et *t*, associés au pivot *s*, former un accord parfait dont tous les sons aboutissent en cadence sur l'accord parfait de *do*, conformément à la figure (**187**) :

(**187**)

r s l
d m s d

Cette cadence est la plus caractérisée de toutes celles qui résultent des mouvements de l'échelle des cadences ; elle suffit à donner l'impression du mode majeur ; mais les sons *f* et *l* manquent, il convient de les faire intervenir, pour que tous les sons de l'échelle soient représentés. Comme nous voulons utiliser de simples mouvements d'accords parfaits et comme *fa* fait avec *sol* l'intervalle $\left(\frac{9}{8}\right)$ et avec *la* l'intervalle $\left(\frac{10}{9}\right)$ (intervalles de l'échelle diatonique bien entendu), il est essentiel d'associer à *fa* et *la* le pivot *do* qui caractérise ces petits intervalles. Le mouvement successif sera le suivant :

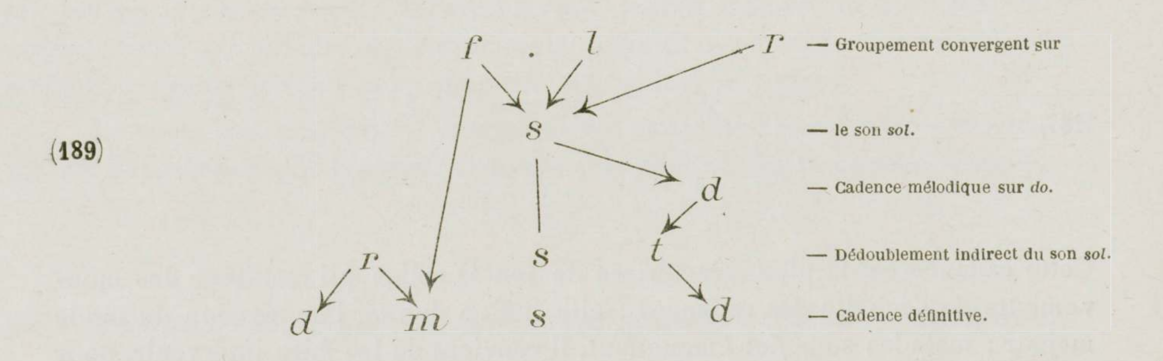
(**188**)



Tel est le mouvement complet caractéristique de la tonalité de *do* majeur, sur l'échelle diatonique.

Ce mouvement aboutit bien à l'accord parfait de *do* comme par l'échelle des cadences, mais le principe des mouvements des trois premières lignes de la figure (**188**) est totalement différent. L'accord *f l d* de la troisième ligne est ici un accord parfait non infléchi. Avec l'échelle des cadences, les intervalles de *f* à *sol* et de *l* à *sol* sont respectivement $\left(\frac{7}{8}\right)$ et $\left(\frac{9}{8}\right)$. Ce dernier amène, à l'égard du son *sol*, la notion du son *r*, pour former entre quinte et quarte la différence $\left(\frac{9}{8}\right)$. D'un autre côté, le son *ré* combiné au son *fa*, constitue une forme de deux sons par concentration qui convergent sur *sol* (figure (**94**), chap. VI, § 14). On a donc, avec l'échelle des cadences :

(**189**)



L'accord *f l r* de la première ligne est un accord parfait mineur infléchi. Dans la figure (**189**), nous avons fait abstraction de la cadence secondaire intermédiaire passant par le son $\underset{\flat}{t}$ étranger à l'échelle diatonique.

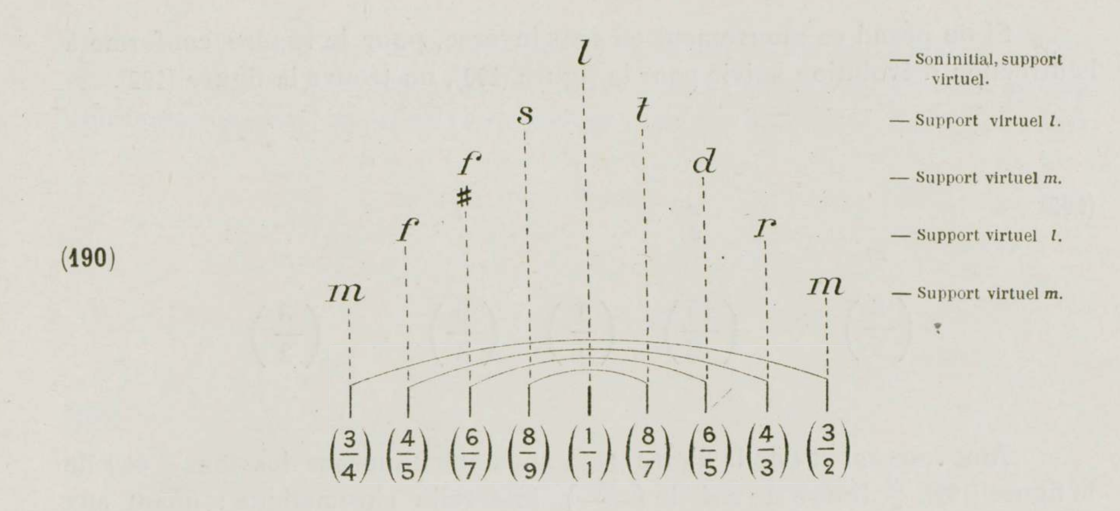
Les deux mouvements (**188**) et (**189**), sont les plus caractéristiques du mode majeur.

La cadence des accords définie par la figure (**187**) forme ce qu'on appelle la cadence majeure.

§ 5. — **L'échelle des évolutions manque de repos.**

Considérons les mouvements accusés par l'échelle des évolutions, tels qu'ils sont indiqués sur la figure (**116**), chap. VII, § 15 :

(190)



Nous reproduisons cette figure, avec la cote des intervalles, sur la figure (**190**). On remarque tout d'abord que les mouvements de dédoublements successifs s'opèrent toujours sur un support virtuel commun aux sons dédoublés ; ces supports virtuels communs sont alternativement *l* et *m*. Ces mouvements caractérisent des évolutions successives, aucun repos n'intervient pour arrêter le mouvement du son.

§ 6. — Cadence mineure.

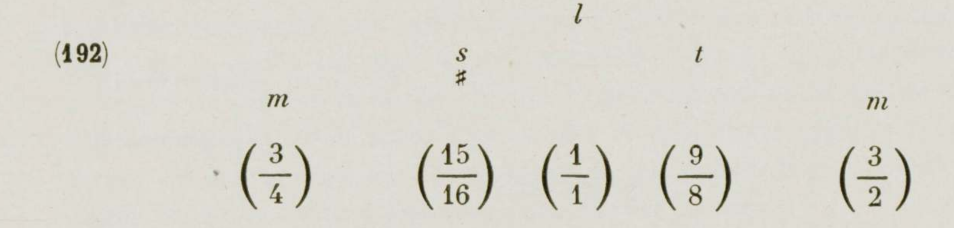
Lorsque les sons effectuent des mouvements conformes à ceux qui résultent de la figure (**190**), il est indispensable de leur créer un arrêt. Pour cela, constatant la cadence indiquée par les supports virtuels de *m* à *l*, on cherche à modifier les sons de manière à rendre cette cadence effective. Afin d'indiquer cette cadence de *mi* sur *la*, on accompagne le son *mi* des deux sons qui forment la cadence élidée sur *la* ; ces deux sons sont le $\overset{s}{\#}$ et le *t*, côtés conformément à la figure (**191**).

(191)

l	*t*	*m*	*s* #	*l*
$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$

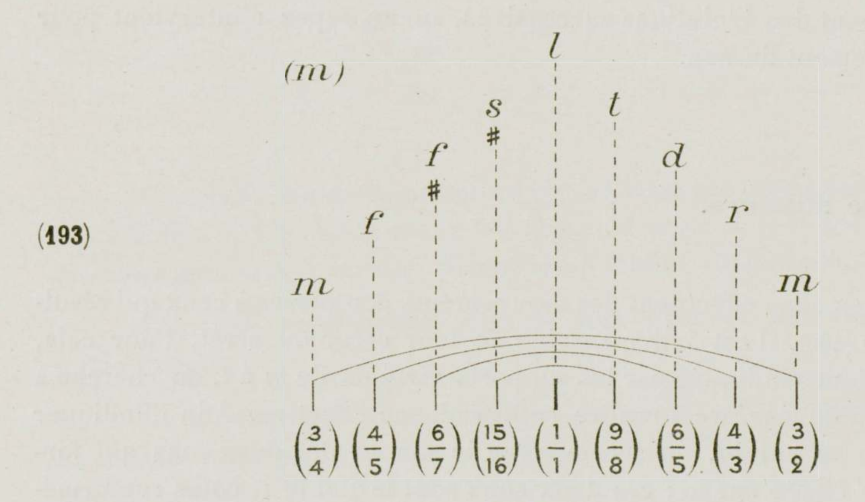
Si on prend ce mouvement en sens inverse, pour le rendre conforme à la direction d'évolution suivie pour la figure (**190**), on trouve la figure (**192**).

(**192**)



Aux sons *sol* et *t* de la figure (**190**), nous substituerons les sons $\underset{\#}{s}$ et *t* de la figure (**192**). $\underset{\#}{S}$ diffère de *sol* de $\left(\frac{25}{24}\right)$, intervalle chromatique ; quant aux deux formes du son *t*, celle de la figure (**190**) accuse avec *l*, l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$, celle de la figure (**192**) accuse, toujours avec *l*, l'intervalle $\left(\frac{9}{8}\right)$. Le son *t*, en passant de la figure (**190**) à la figure (**192**), a donc été abaissé de *j*. Le mouvement ainsi transformé est accusé sur la figure (**193**) :

(**193**)

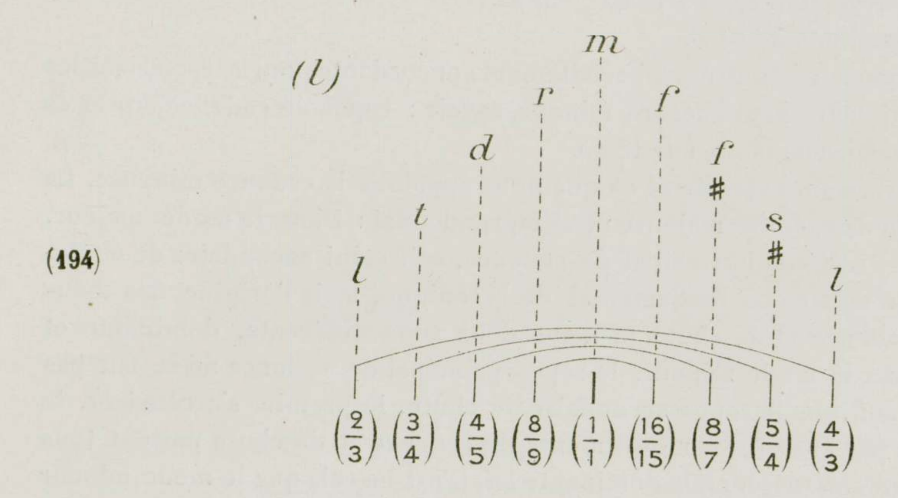


Comme le mouvement accusé par la figure (**193**) se fait en sens inverse de la cadence, il suffit, pour obtenir cet effet de cadence de le retourner, comme sur la figure (**194**).

Le premier fait particulier à signaler, soit à l'égard du mouvement indirect accusé par la figure (**193**), soit à l'égard du mouvement direct accusé par la figure (**194**), c'est là nécessité d'utiliser au point de départ, dès le mouvement de la seconde ligne de chaque figure, un pivot *mi* dans l'une et *la* dans l'autre,

comme nous le mentionnons dans une parenthèse. C'est que en effet l'intervalle de $\left(\frac{16}{15}\right)$ de $\underset{\sharp}{s}$ à *l* dans l'une et de *m* à *f* dans l'autre n'est qu'un intervalle différentiel incomplet qui ne peut survenir que par différence. Cette différence

(**194**)



s'effectue, sur les intervalles *m l* et *m* $\underset{\sharp}{s}$ pour la première figure et *l m* et *l f* pour la seconde.

Nous devons examiner maintenant comment se caractérise définitivement la cadence que nous avons créée par le mouvement de la figure (**194**). Examinons pour cela l'avant-dernière ligne de cette figure, les deux sons qui la composent, avec le pivot *mi* forment l'accord parfait *t m* $\underset{\sharp}{s}$, dans lequel *mi* fait cadence sur le *la* de la dernière ligne, où l'on s'arrête, les sons *t* et $\underset{\sharp}{s}$ avec le pivot *mi* font cadence élidée sur le même son *la*. Quant à la station sur le *la* où l'on marque l'arrêt, si on la combine avec le pivot *mi* qui a conduit le mouvement, on ne trouve parmi les sillons des sons antérieurs que ceux qui résultent du son *do* pour former un accord parfait. Finalement, on aboutit donc à l'accord *l d m l*, conformément à la figure (**195**) :

(**195**)

t → *l*, *d*   *m* | *m* $\underset{\sharp}{s}$ → *l*

Dans ce mouvement, les sons *t* et $\underset{\sharp}{s}$ font cadence élidée sur *la*, quant au mouvement de *t* sur *d* qui réduit l'intervalle $\left(\frac{3}{4}\right)$ à $\left(\frac{4}{5}\right)$, c'est précisément le

mouvement de chute partielle indiqué sur la figure (**120**) du chap. VIII, § 6. Le mouvement définitif accuse donc :

1° Cadence de *mi* sur *la* et chute de *mi* sur *do* ;

2° Cadences élidées de *t* et de $\underset{\#}{s}$ sur *la* ;

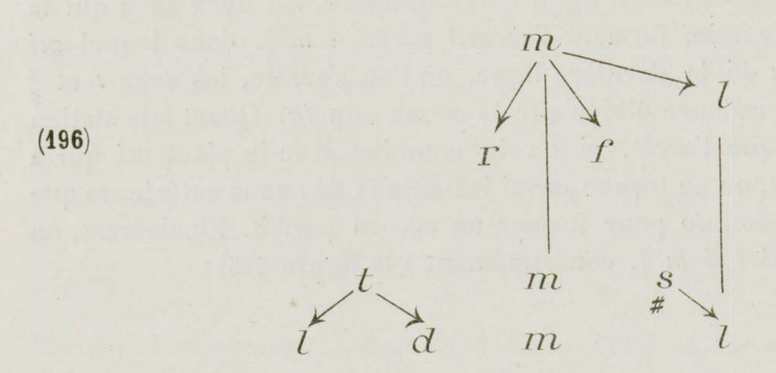
3° Chute élidée de *t* à *d*.

Tous ces mouvements sont donc parfaitement concordants pour caractériser les deux repos qui définissent l'accord mineur, savoir : repos de cadence sur le *la* et repos secondaire de chute sur le *do*.

Ce mouvement caractérise ce que nous appelons la cadence mineure. La différence avec la cadence majeure se comprend ainsi : Dans le mode majeur, tous les repos, soit celui principal de cadence, soit celui secondaire de chute, aboutissent au même son fondamental de la tonique, mais l'origine des mouvements de cadence et de chute forment deux sons différents, dominante et médiante. Dans le mode mineur, le repos principal de cadence ne se fait pas sur le même son que le repos secondaire de chute, le premier s'arrête à *la*, le second à *do* ; par contre, les mouvements de cadence et de chute partent tous deux du même son originel, la dominante *mi*. C'est en cela que le mode mineur diffère principalement du mode majeur.

Finalement, le mode mineur se trouve défini par un mouvement analogue à celui de la figure (**188**), mouvement qui se déduit de la figure (**194**) en supprimant le mouvement chromatique *f* à $\underset{\#}{f}$. On obtient donc :

(**196**)



§ 7. — **Echelle diatonique mineure.**

Avec le § précédent, nous avons tiré de l'échelle des évolutions, figure (**190**), tous les éléments qui constituent ce qu'on nomme le mode mineur, lequel se

trouve finalement défini par le mouvement de la figure (**196**). Les sons qui en résultent forment ce qu'on appelle improprement l'échelle diatonique mineure, nous les rapportons sur la figure (**197**) avec les cotes de repère :

(**197**)

l	*t*	*d*	*r*	*m*	*f*	$\underset{\sharp}{s}$	*l*	
$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{9}{8}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{8}{5}\right)$	$\left(\frac{15}{8}\right)$	$\left(\frac{2}{1}\right)$	Cotes, à partir du son *la*.
$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{8}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{16}{15}\right)$	$\left(\frac{5}{4}\right)$	$\left(\frac{4}{3}\right)$	Cotes, à partir du son *mi*.

On constate que ces sons appartiennent tous à l'échelle diatonique normale, sauf un, le $\underset{\sharp}{s}$. Les intervalles diatoniques de cette échelle mineure sont donc les mêmes que ceux de l'échelle normale, sauf l'intervalle de seconde augmentée, entre *f* et $\underset{\sharp}{s}$ qui forme ce qu'on appelle improprement un intervalle diatonique du mode mineur.

Il est aisé de comprendre pourquoi, moyennant les transformations qui ont été faites au § précédent, aucun son de l'échelle mineure n'a subi l'inflexion qui résulte de l'utilisation de l'empreinte 7. C'est qu'en effet, comme on le voit sur la figure (**193**), le passage par l'empreinte 7 s'est effectué avec le son $\underset{\sharp}{f}$ qui a été supprimé de l'échelle, avec l'intervalle chromatique qu'il comporte.

Les termes de tonique, dominante, sous-dominante, sensible et médiante s'appliquent aux sons *l*, *m*, *r*, $\underset{\sharp}{s}$ et *d* du mode mineur. Ces sons se placent, relativement à la fondamentale, sur les degrés correspondants. Leur signification est analogue à celles du mode majeur, avec les différences qui résultent de la comparaison faite au § 6, entre la cadence majeure et la cadence mineure. Dans le mode mineur, comme dans le mode majeur, les sons principaux sont la dominante et la fondamentale.

Enfin, nous remarquerons qu'en supprimant le son *sol* de l'échelle diatonique normale, on rend par cela même la cadence impossible sur *do*, cette cadence n'ayant son point de départ sur aucune dominante.

§ 8. — Inflexions des intervalles sur l'échelle diatonique mineure.

Lorsqu'on a envisagé l'échelle diatonique normale, après avoir constaté que les deux sons *si* et *fa* n'avaient pas de relation directe en vertu des empreintes 3 et 5, on a été amené à créer cette relation au moyen de l'empreinte 7 et moyennant le comma majeur j. La même question se pose à l'égard de l'échelle diatonique mineure, à propos des intervalles de t à f et de $\underset{\sharp}{s}$ à r, intervalles qui sont les mêmes ; soit en montant : $\left(\frac{64}{45}\right) = j + \left(\frac{7}{5}\right)$. C'est la quinte mineure ou la quinte diminuée, ce qui est la même chose. La question qui se pose est celle de savoir sur quel son on fera porter le mouvement d'inflexion.

Si on se reporte aux explications longuement développées au § 10 du chap. X, on verra que la définition de ces inflexions ne peut résulter que des sons indicateurs dont on dispose et placés, soit à l'intervalle $\left(\frac{4}{7}\right)$ au-dessous du son le plus élevé de ceux qui font l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$ à infléchir, soit à l'intervalle $\left(\frac{7}{4}\right)$ au-dessus du son le plus grave.

En ce qui concerne l'intervalle de t à f, nous ne pouvons pas disposer du son *sol*, qui pourrait répondre à la question au regard du son *fa*, puisque ce son n'est pas sur l'échelle. Nous ne disposons donc que du seul son indicateur *la*, savoir :

$$\begin{array}{cccc} t & . & f & l \\ \left(\frac{4}{7}\right) & & \left(\frac{4}{5}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) \end{array}$$

qui peut donner, par une inflexion du son t, l'intervalle $\left(\frac{4}{7}\right)$ à partir de *la*. La position du son *ré* intermédiaire correspond à une quinte au-dessous de *la*, cette position est donc bien celle de l'échelle.

En ce qui concerne l'intervalle de $\underset{\sharp}{s}$ à r, la même observation fait voir que pour caractériser cet intervalle conformément à $\left(\frac{7}{5}\right)$, nous ne disposons que du son indicateur *mi* ; l'autre son indicateur de cet intervalle serait $\underset{\sharp}{f}$ qui est en dehors de l'échelle, on a donc :

$$\begin{array}{cccc} m & \underset{\sharp}{s} & . & r \end{array}$$

Dans cette combinaison, le son *r* se trouve abaissé du comma majeur *j*. Quant à la position du son *t* intermédiaire, elle doit être à une quinte au-dessus de *mi* ; comme cette position est celle de l'échelle mineure, aucune inflexion n'en résulte.

En définitive, les intervalles qui doivent être infléchis à la valeur $\left(\frac{7}{5}\right)$ ne peuvent être repérés qu'aux deux sons principaux du mode, *l* ou *m*. Ils constituent sur l'échelle mineure :

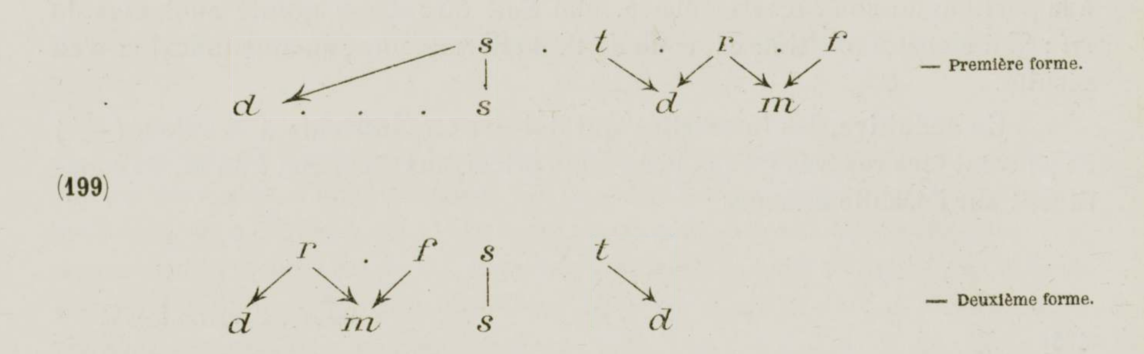
(**198**)	*t*	*r*	*f*	*l*	Accord de septième de seconde.
	m	*s* ♯	*t*	*r*	Accord de septième de dominante.

Dans le premier, le son *t* est infléchi en montant de *j*, dans le second, le son *r* est infléchi de *j* en descendant, les sons *l* et *m* devant garder la fixité nécessaire pour caractériser la cadence mineure.

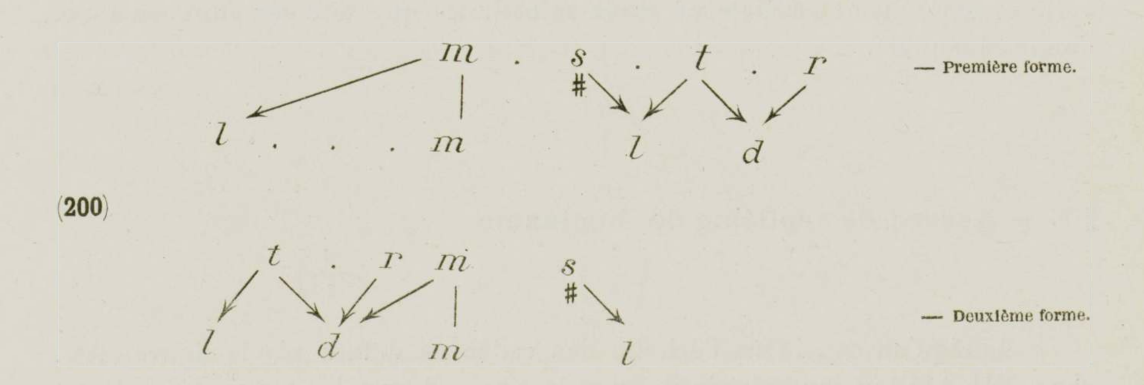
L'infléchissement du son *t* est précisément celui qui correspond à l'échelle des évolutions. Quant à l'infléchissement du son *r*, c'est une altération nouvelle et absolument spéciale au mode mineur tel que la conception en a été donnée jusqu'ici.

§ 9. — Accord de septième de dominante.

Lorsqu'on considère l'échelle des cadences définie par la figure (**115**), chap. VII, § 15, on peut réunir en un même accord tous les sons qui amènent les cadences. Ces sons sont les suivants : le *s* qui fait cadence sur *do* ; — le *r* et le *t* qui font cadence élidée sur *do* ; — le *fa* et le *ré* qui font cadence élidée partielle par l'intermédiaire de la réplique *mi* de *do*. — Nous faisons abstraction du son *la*, qui, pour faire la cadence élidée partielle est obligé d'aboutir à la réplique $\underset{\flat}{t}$ du son *do*, réplique qui est étrangère à l'échelle. L'ensemble de ces sons est donné par la première ligne de la figure (**199**), c'est l'accord de septième de dominante étudié au § 10, chap. VIII. Tous les sons de cet accord font cadence sur les sons de l'accord parfait de *do*, placé sur la seconde ligne :



Considérons de la même manière l'accord de septième de dominante que nous écrivons sur la première ligne de la figure (**200**), nous voyons que, moyennant l'inflexion du son *ré*, telle que nous l'avons définie, on obtient les effets de la cadence mineure, c'est-à-dire des effets de cadence et cadences élidées sur le son *la* et des effets de chute et de chutes élidées sur le son *do* :



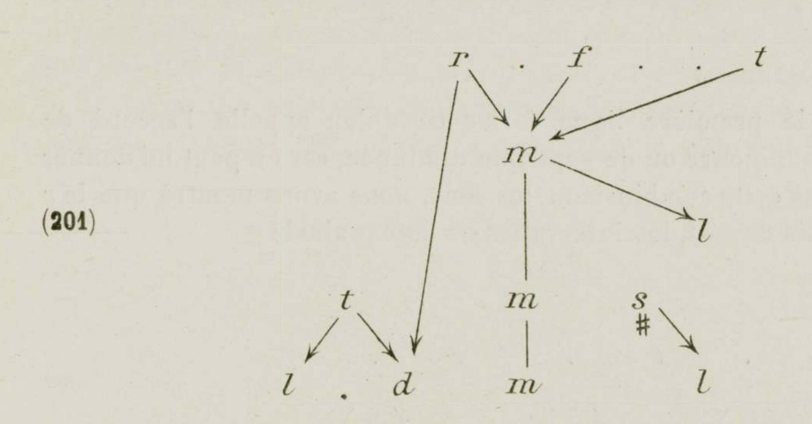
Les flèches qui aboutissent au *la* marquent les diverses cadences ; et celles qui aboutissent au *do* marquent les diverses chutes.

Les mouvements indiqués par chacune des figures (**199**) et (**200**) sont absolument caractéristiques des modes majeur et mineur. La première comprend tous les sons de l'échelle majeure, sauf le *la*, la seconde tous les sons de l'échelle mineure sauf le *fa*. L'accord de septième de dominante a la même forme dans les deux modes ; dans le premier cas, il y a cadence majeure et dans le second cas, il y a cadence mineure.

§ 10. — **Accord de septième sensible mineur ou accord de septième diminuée. — Accord de neuvième diminuée.**

On se souvient que nous avons caractérisé le mode mineur au moyen des mouvements définis par la figure (**195**) du § 6. Cette figure correspond à celle indiquée sous le numéro (**188**), § 4, à propos du mode majeur. Or, on a vu au même §, avec la figure (**189**), une interprétation légèrement différente ; nous allons montrer qu'on peut constituer un mouvement caractéristique du mode mineur analogue à celui de la figure (**189**). Ce mouvement, portant sur les degrés correspondants du mode mineur serait le suivant, figure (**201**) :

(**201**)



Entre le *f* et le *t*, première ligne, il y a l'intervalle $\left(\frac{10}{7}\right)$. Entre le *mi* et le *si*, deuxième ligne, il y a une quinte $\left(\frac{3}{2}\right)$. L'intervalle de *m* à *f* est donc $\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{10}{7}\right) = \left(\frac{21}{20}\right)$. Le son *r*, associé au son *si*, pour converger sur *mi*, doit former le groupement convergent, fig. (**94**), chap. VI, § 14 ; ce son *ré* doit donc être à $\left(\frac{7}{8}\right)$ au-dessous de *mi*. Les trois sons ainsi constitués convergent sur mi, ce dernier fait cadence sur *la*, cadence qui est définitivement indiquée sous la forme mineure au moyen des deux derniers accords.

La combinaison (**201**) comporte, pour le son *r*, l'inflexion —*j* qui correspond à l'accord de septième de dominante. L'intervalle de *r* à *t* est $\left(\frac{7}{6}\right)$, l'intervalle de *r* à *f* est $\left(\frac{6}{5}\right)$; le *f* a donc suivi l'inflexion du son *r* et s'est abaissé du comma *j*. On a bien en effet $\left(\frac{8}{7}\right) + \left(\frac{21}{20}\right) = \left(\frac{6}{5}\right)$. L'ensemble des trois sons de la première ligne *t r f* qui convergent sur *m*, combinés avec les sons *t*

et $\underset{\#}{s}$ qui convergent sur *l* et *d* caractérisent la cadence mineure ; on peut élider la cadence intermédiaire de *m* à *l* et écrire, figure (**202**) :

(**202**)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & t & . & r & . & f & & \underset{\#}{s} & . & t & \\ \swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & & \searrow\swarrow & & \\ l & & d & & m & & & & t & & \end{array}$$

ou simplement

(**203**)

$$\begin{array}{ccccccccc} & t & & r & & f & & \underset{\#}{s} & \\ \swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & & & \searrow \\ l & & d & & m & & & & l \end{array}$$

L'accord de la première ligne forme ce qu'on appelle l'accord de septième de sensible mineure ou de septième diminuée, car on peut lui donner la forme $\underset{\#}{s}$ *t r f*. Dans cette combinaison des sons, nous avons montré que le *r* et le *f* étaient infléchis de — *j*, les intervalles se cotent ainsi :

(**204**)

$$\begin{array}{ccccccc} \underset{\#}{s} & . & t & . & r & . & f \\ \multicolumn{7}{c}{\leftarrow\left(\frac{6}{5}\right)\rightarrow\leftarrow\left(\frac{7}{6}\right)\rightarrow\leftarrow\left(\frac{6}{5}\right)\rightarrow} \end{array}$$

C'est un accord dissonnant qui résulte de la fusion des deux accords mixtes provenant des deux formations (**198**). Les sons *m* et *l* étant considérés comme fixes dans ces deux dernières, on infléchit le *t* de l'une et le *ré* de l'autre, en conservant au contraire les sons exacts *r* de l'une et *t* de l'autre. La superposition (**204**) n'a été possible qu'en supprimant les sons indicateurs pour permettre d'abaisser le *ré* et le *fa*. Toutefois, la mention du son *m* avec l'accord (**204**) ne troublerait pas les indications, il en serait autrement de celle du son *la* qui, étant fixe, obligerait $\underset{\#}{s}$ et *r* à s'infléchir de + *j* en supprimant l'expression des cadences qu'on a eu précisément pour objet de créer. On aurait alors l'accord de neuvième de dominante mineure, ou de neuvième diminuée, figure (**205**).

L'accord de la figure (**204**) accuse l'incompatibilité signalée au chap. XI, § 7, à propos de la figure (**170**). Cette incompatibilité ne résulte pas d'un inter-

(**205**)

$$\begin{matrix} m & . & \overset{}{\underset{\#}{s}} & . & t & . & r & . & f \end{matrix}$$

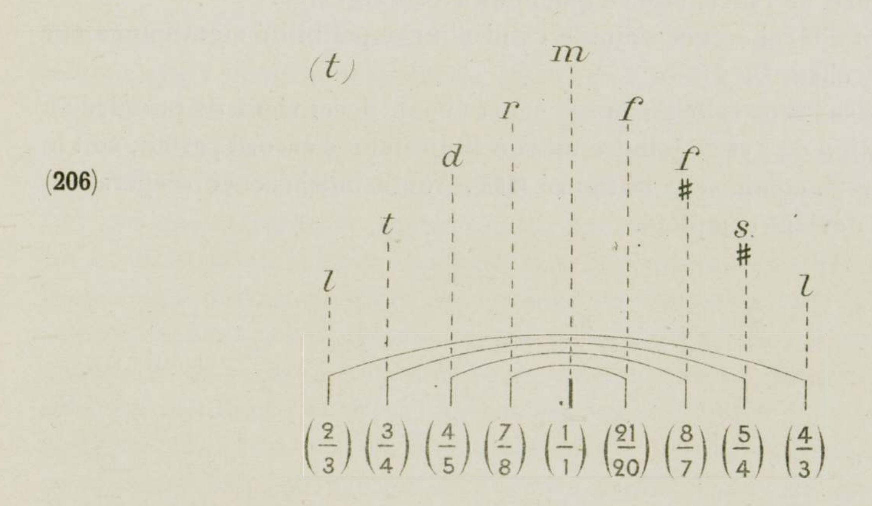
$$\prec\left(\frac{5}{4}\right)\succ\prec\left(\frac{6}{5}\right)\succ\prec\left(\frac{7}{6}\right)\succ\prec\left(\frac{6}{5}\right)\succ$$

valle original, mais de l'intervalle différentiel $\left(\frac{6}{5}\right)$ ou $\left(\frac{7}{6}\right)$ dont la direction est peu accusée, on la tolère.

L'accord de septième diminuée et celui de neuvième diminuée sont absolument caractéristiques du mode mineur. Ce sont des accords dissonnants bien entendu ; mais nous sommes amenés à en parler dès maintenant parce qu'ils se lient intimement au mode mineur, objet actuel de notre étude.

La combinaison (**201**) comporte une légère altération du pivot initial du mouvement, figure (**194**), ce pivot est alors *t* et le mouvement est le suivant :

(**206**)



§ 11. — Incohérence à signaler.

Lorsque nous envisageons le mouvement du mode mineur, soit sous la forme de la figure (**206**), soit sous celle des figures (**193**) ou (**194**), nous voyons que jamais le son *d* n'est associé, dans le même mouvement, avec le son *sol*

dièze. C'est qu'en effet ces deux sons, combinés avec le pivot *mi*, créent une incohérence en même temps qu'une incompatibilité.

Considérons en effet la combinaison indiquée sur la figure (**207**) :

(**207**) $d \quad . \quad m \quad . \quad \underset{\sharp}{s}$

Cet ensemble produit un effet d'incohérence très marqué qui résulte de ce que, à partir du son *mi* intermédiaire, le mouvement montant vers $\underset{\sharp}{s}$ est indirect, tandis que le mouvement descendant sur le *do* est direct.

On peut constater que c'est bien l'incohérence qui produit le mauvais effet signalé. Pour cela, considérons les intervalles formés par les sons de la figure (**207**), en les prenant deux à deux de toutes les manières possibles. Nous trouvons deux tierces majeures consonnantes de *do* à *mi* et de *mi* à $\underset{\sharp}{s}$. Quant à l'intervalle de *do* à $\underset{\sharp}{s}$, à ne considérer que les sons réels, sur le clavier par exemple, on trouve qu'il est le même que de *do* à $\underset{\flat}{l}$; mais cet intervalle est consonnant, puisqu'il est le renversement d'une tierce majeure. Les sons réels accusent donc bien des intervalles réellement consonnants ; l'ensemble est dissonant à cause de l'incohérence que nous avons signalée.

A cet effet d'incohérence s'ajoute celui d'incompatibilité mentionnée sur la figure (**169**) du chap. XI, § 6.

Pour rendre l'intervalle de *do* à $\underset{\sharp}{s}$ consonnant, il convient de prendre au lieu de $\underset{\sharp}{s}$ la notation de $\underset{\flat}{l}$ et de joindre un son indicateur d'accord parfait, soit le son *f*, soit le son $\underset{\flat}{m}$, comme sur la figure (**208**). Toute incohérence disparaît et la consonnance devient complète.

$$(208) \quad \begin{array}{cccc} d & . & \underset{\flat}{m} & \underset{\flat}{l} \\ d & & f & \underset{\flat}{l} \end{array}$$

§ 12. — **Modes secondaires.**

On a remarqué que le changement le plus caractéristique qu'il a fallu faire pour passer du mode majeur au mode mineur a été d'altérer le *sol* de l'échelle afin de le transformer en $\underset{\sharp}{s}$. Cette transformation a pour effet capital

de supprimer la cadence sur *do*, en supprimant la dominante, et de créer une cadence mineure sur l'accord de *la*.

On peut généraliser cette notion qui consiste à altérer un son capital d'une combinaison, afin d'altérer en même temps le résultat. Les sons capitaux sont ceux qui constituent les accords parfaits de *do* et de *la*, savoir :

(209)			*d*	.	*m*	.	*s*
	l	.	*d*	.	*m*		
	l	.	*d*	.	*m*	.	*s*

— Nous avons vu, avec le mode mineur, le résultat produit par la modification de *s* à $\underset{\#}{s}$, nous n'y reviendrons pas.

— Envisageons la modification symétrique sur le son conjugué *l*, en le changeant en $\underset{\flat}{l}$. Nous obtenons la formation :

d *r* *m* *f* *s* $\underset{\flat}{l}$ *t* *d*

Elle comporte deux cadences d'accord, l'une de l'accord de *do*, sur un accord mineur ayant *f* pour fondamentale, l'autre de l'accord de *sol* sur l'accord de *do*. C'est donc un mode mixte qui est peu usité à cause de cela. Néanmoins, on s'en sert quelquefois moyennant l'observation suivante :

Considérons les dédoublements successifs accusés par la figure (**193**) du § 6. Les mouvements, en partant de *la*, pour aboutir à *mi* font une évolution. Le *mi* de la dernière ligne combiné avec le pivot forme un groupe de trois sons instable qui doit se résoudre en cadence sur le son unique *la*. Pour marquer nettement l'évolution obtenue quand on aboutit au son *mi*, on supprime le pivot *la* et on accuse les sons de l'accord parfait de *mi*, dans la position stable, sons qui résultent des sillons formés par les sons $\underset{\#}{s}$ et *t* de la seconde ligne de la figure (**193**). Dès lors, on n'envisage que le dernier mouvement résultant de cette figure (**193**), en partant de l'accord parfait *f l r*, on aboutit à l'accord *m* $\underset{\#}{s}$ *t m*, conformément à la figure (**210**). Ce mouvement, qui est déduit de l'évolution de la figure (**193**) peut être considéré comme une manière d'évolution de deux accords :

(210)		*f*	.	*l*	.	.	*r*	
	m		$\underset{\#}{s}$		*t*			*m*

Ce mouvement d'évolution aboutit à l'accord parfait de la dominante du mode et peut se résoudre ensuite sur l'accord *l d m*, en cadence mineure.

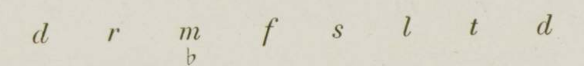
Les mêmes considérations peuvent s'appliquer au groupe des sons qui ont été formés en changeant, sur l'échelle le *la* en $\underset{\flat}{l}$; on aurait l'effet donné par la figure (**211**), en tout semblable à la figure (**210**), mais avec cette différence que le dernier accord au lieu de se porter en cadence sur un accord mineur, celui de *la* dans le cas de la figure (**210**), porterait sa cadence sur un accord parfait majeur, celui de *do* :

(**211**)

$$\begin{matrix} & \underset{\flat}{l} & . & d & . & . & f & \\ s & & t & & r & & & s \end{matrix}$$

— Après avoir altéré les sons principaux *s* . et *l* . Nous pouvons modifier les deux autres sons principaux *do* ou *mi*.

Changeons d'abord *mi* en $\underset{\flat}{m}$. Nous obtenons la formation :



Cette altération a pour effet de rendre mineur l'accord de *do*, alors qu'il était primitivement majeur. La cadence de sol se portant toujours sur l'accord de *do*, devient une cadence mineure, et l'on a créé ainsi, en quelque sorte, une manière de mode mineur dans lequel la tonique est *do*. L'expression de ce même mode, avec la tonique *la* donnerait :

(**212**) $\quad l \quad t \quad d \quad r \quad m \quad \underset{\sharp}{f} \quad \underset{\sharp}{s} \quad l$

Cela supprime des intervalles diatoniques mineurs, la seconde augmentée de *f* à $\underset{\sharp}{s}$. l'altération dont nous parlons est aisée et résulte de ce que l'accord de septième de dominante est le même dans les deux modes.

Néanmoins, l'infériorité de ce mode secondaire est manifeste, parce qu'on ne peut le faire découler directement de l'échelle des évolutions. Le changement du *f* en $\underset{\sharp}{f}$ sur la figure (**212**) ne permet plus de faire l'évolution caractéristique du mode mineur, telle qu'elle résulte de la figure (**210**) ; enfin la formation (**212**) comporte deux accords qui présentent la forme de septième de dominante : $m\ \underset{\sharp}{s}\ t\ r$ et $r\ \underset{\sharp}{f}\ l\ d$, de tels accords appellent presque impérieu-

sement une cadence. Or le premier des deux peut seul faire cadence sur l'accord de *la* ; le second ne comporte aucune cadence possible, parce qu'elle devrait se faire sur *sol* et que ce son est supprimé de l'échelle et remplacé par $\underset{\sharp}{s}$.

Après avoir altéré le *mi*, en le changeant en $\underset{\flat}{mi}$, il nous reste à voir l'altération symétrique du son conjugué *do*, changé en $\underset{\sharp}{d}$, on aura

$$r \quad m \quad f \quad s \quad l \quad t \quad \underset{\sharp}{d} \quad r$$

qui donne le même mode que la figure (**212**).

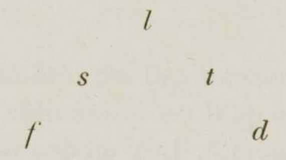
§ 13. — **Modes spéciaux.**

Si l'on réfléchit aux moyens qui ont été employés pour constituer les modes, on s'aperçoit bien vite qu'il est impossible d'en constituer d'autres qui aient une acception aussi générale. Les modes résultent en effet des moyens que l'on emploie pour mouvoir mélodiquement les sons et les couduire au repos. Or, les repos résultent du parcours des intervalles originaux dans le sens direct. Les intervalles originaux sont en tout et pour tout au nombre de quatre, savoir : $\left(\frac{2}{3}\right)$ ou $\left(\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{7}\right)$ et $\left(\frac{8}{9}\right)$. Il n'y a pas d'autres moyens d'aboutir au repos que le parcours de ces intervalles. Si l'on combine le son sur lequel on veut aboutir, avec la série des sons d'où l'on peut partir pour parcourir ces intervalles, on s'aperçoit immédiatement que l'ensemble des sons obtenus constitue un accord unique. Il résulte de ces explications qu'en parcourant un quelconque de ces intervalles pour aboutir au repos, les sons devraient se mouvoir sur le même accord. Ces mouvements n'apporteraient par conséquent aucun changement à l'état harmonique défini par l'accord ; par suite, tous les modes que l'on pourrait créer ne seraient pas, à proprement parler, compatibles avec les mouvements des accords ; ils ne pourraient être en quelque sorte que des modes purement mélodiques.

— Si on envisage par exemple l'ensemble des sons formés, non par l'échelle diatonique, mais par l'échelle des cadences, on voit que les sons *r f l* et *t* convergent sur le son *sol* conformément aux intervalles originaux qui viennent d'être indiqués. Il ne reste sur l'échelle que les deux sons *do* et *mi*, qui aboutissent à *sol* par des mouvements d'évolution. On pourrait même y

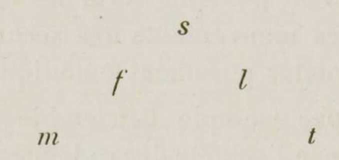
changer *mi* en *mi*♭. Si tous les mouvements convergent vers *sol*, on aura ainsi constitué un mode mélodique qui ne comporterait aucune sensible. Il y a des exemples de modes analogues à celui-là dans la musique ancienne qui était purement mélodique. Nous le répétons, conformément aux explications précédentes, ces modes ne se prêtent pas aux développements des états harmoniques définis par les accords parfaits, ils ne peuvent donc pas constituer des modes harmoniques, mais des modes purement spéciaux et à moyens extrêmement limités.

— On peut remarquer que les mouvements définis par les figures (**115**) et (**116**) du chap. VII, § 15, ne comportent jamais l'intervalle de quinte entre les sons correspondants d'une même ligne. Considérons par exemble la fig. (**116**). Changeons, sur la troisième ligne, le *f*♯ en *f* naturel, nous aurons alors sur la même ligne les sons *f* et *d* formant quinte.



On voit bien que le *la* se dédouble pour aboutir à *fa* et à *do* conformément au groupement (**45**) *A P M*. Les sons s'arrêtent en équilibre sur la quinte *f d* et constituent avec le pivot un accord parfait majeur. Mais ce dédoublement forme avec celui qui le précède de *s* à *t*, une incohérence inacceptable que nous avons particulièrement signalée au moyen de la figure (**113**), chap. VII, § 14. Il n'y a donc rien à tirer de là.

— Au lieu d'envisager, comme nous venons de le faire, la figure (**116**), considérons la figure (**115**), et changeons le *t*♭ de la troisième ligne en *si* naturel, on obtiendra :



Cette conception de mouvement ne présente pas l'incohérence de la précédente, nous l'avons signalée à la figure (**114**), chap. VII, § 14. Le dédou-

blement de *sol* vers les sons *mi* et *si* est indirect, il ne comporte donc pas de repos. Pour obtenir un repos, il faudrait faire le mouvement en sens inverse, qui caractérise une pauvreté harmonique généralement inadmissible.

Nous avons donné ces explications pour faire comprendre que toute notion d'harmonie, basée sur un état harmonique de trois sons, conformément aux accords parfaits, ne peut pas comporter à proprement parler d'autres modes harmoniques que ceux que nous avons définis sous les noms de modes majeurs et mineurs.

CHAPITRE XIII

Génération des Accords

§ 1. — Utilisation des derniers groupements de trois sons.

Parmi les groupements de trois sons du chap. III, § 7, il nous reste à examiner :

1° (46) $A\ I\ p = 4$ et (47) $A\ I\ p = 4$

2° (45) $A\ I\ p = 4$ et (48) $A\ I\ p = 4$

Les deux premiers utilisent l'empreinte 7 combinée à l'empreinte 9. — Les deux derniers utilisent l'empreinte 5 concurremment avec l'empreinte 9, sans recourir à l'empreinte 7.

On se souvient que nous avons limité les tableaux du chap. III, § 7, au nombre 10. On comprend aujourd'hui pourquoi, puisque 10 forme la dernière empreinte directe. D'un autre côté, la théorie des cadences et des chutes élidées, nous a permis d'étendre la théorie des trois sons un peu plus loin que cette limite, tout comme si l'on avait pu continuer à suivre les nombres : 10, 11, 12 et 12, 13, 14 et enfin 14, 15, 16 et 18, 19, 20, malgré l'impossibilité de se servir des empreintes 11, 13, 19. Toutefois, les deux dernières séries ne sont pas utilisables ici, parce que, conformément à ce qui résulte des numéros

3 et 4 du § 11, chap. VII, elles empruntent l'intervalle $\left(\frac{15}{14}\right)$, qui est chromatique et qui ferait sortir les sons des échelles sur lesquelles on est tenu de se mouvoir. Bref, en dehors des groupes du chap. III, § 7, nous aurons encore à utiliser :

(213)

$$\begin{array}{ccc} m & f & s \\ | & | & | \\ t & d & r \\ \cdot\longrightarrow & \longleftarrow & \cdot \\ \left(\frac{15}{16}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{9}{8}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} l & t & d \\ | & | & | \\ r & m & f \\ \longleftarrow & \cdot & \longrightarrow \\ \left(\frac{8}{9}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{16}{15}\right) \end{array}$$

$$\leftarrow\cdots\left(\frac{6}{5}\right)\cdots\rightarrow \qquad\qquad \leftarrow\cdots\left(\frac{6}{5}\right)\cdots\rightarrow$$

(214)

$$\begin{array}{ccc} t & d & r \\ | & | & | \\ \longleftarrow & \cdot & \longrightarrow \\ \left(\frac{20}{21}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{10}{9}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} r & m & f \\ | & | & | \\ \cdot\longrightarrow & \cdot & \longleftarrow\cdot \\ \left(\frac{9}{10}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{21}{20}\right) \end{array}$$

$$\leftarrow\cdots\left(\frac{7}{6}\right)\cdots\rightarrow \qquad\qquad \leftarrow\cdots\left(\frac{7}{6}\right)\cdots\rightarrow$$

Nous aurons alors épuisé tout ce que peut donner la théorie des trois sons.

§ 2. — **Accord de neuvième de dominante.**

Envisageons le groupe (**47**) $A\ I\ p = 4$. Les sons ainsi disposés se placent sur l'échelle des cadences, savoir :

(215)

$$\begin{array}{ccc} f & s & l \\ \longrightarrow & & \longleftarrow \\ \left(\frac{7}{8}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{9}{8}\right) \end{array}$$

C'est un groupement convergent, *f* et *l* forment deux sons préalables qui aboutissent à *s*. Les intervalles parcourus sont originaux et complets, mais dissonnants. Les sons posent sur un même support réel. Pour compléter l'accord, il suffit de joindre aux sons considérés ceux qui peuvent être admis comme étant les sons indicateurs des intervalles dissonnants donnés. C'est-à-dire ceux qui, formant avec *s* des intervalles originaux complets, posent sur le même support réel. On obtient :

(216)

$$\begin{matrix} & & & \longrightarrow & \longleftarrow & & & \\ r & . & f & s & l & t & . & r \\ \left(\frac{3}{4}\right) & & \left(\frac{7}{8}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{9}{8}\right) & \left(\frac{5}{4}\right) & & \left(\frac{3}{2}\right) \end{matrix}$$

— Tous les sons convergent directement sur le son *s*.

Que l'on peut disposer de la manière suivante, pour que tous les intervalles des sons soient définis dans le sens du § 10, chap. X :

(217)

$$\begin{matrix} s & . & t & . & r & . & f & . & l \\ \left(\frac{1}{1}\right) & & \left(\frac{5}{4}\right) & & \left(\frac{3}{2}\right) & & \left(\frac{7}{4}\right) & & \left(\frac{9}{4}\right) \end{matrix}$$

Si on envisage de la même manière le groupe (**46**) $A\ I\ p = 4$, on voit que les sons se posent ainsi sur l'échelle des évolutions :

(218)

$$\begin{matrix} \longleftarrow & \cdot & \longrightarrow \\ s & l & t \\ \left(\frac{8}{9}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{8}{7}\right) \end{matrix}$$

C'est un groupe divergent, *l* est un son préalable, les intervalles parcourus sont originaux et complets, mais dissonnants. Les sons sont suspendus

au même support virtuel, *l*. Pour compléter l'accord, il faut les sons indicateurs des intervalles dissonnants donnés, c'est-à-dire ceux qui forment avec *l* des intervalles originaux complets suspendus au même support virtuel. On obtient :

$$\longleftarrow \cdot \longrightarrow$$

(**219**)

$$\begin{matrix} r & . & f & s & l & t & . & r \\ \left(\frac{2}{3}\right) & & \left(\frac{4}{5}\right) & \left(\frac{8}{9}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{8}{7}\right) & & \left(\frac{4}{3}\right) \end{matrix}$$

Qu'on écrira :

(**220**)

$$\begin{matrix} s & . & t & . & r & . & f & . & l \\ \left(\frac{4}{9}\right) & & \left(\frac{4}{7}\right) & & \left(\frac{2}{3}\right) & & \left(\frac{4}{5}\right) & & \left(\frac{1}{1}\right) \end{matrix}$$

Les deux accords (**217**) et (**220**) portent sur les mêmes sons, mais les intervalles *s* à *r* et *r* à *l* étant les mêmes, ceux qui aboutissent à *t* ou à *f* sont infléchis d'une autre manière, suivant que les indications se réfèrent au son principal *s* comme dans la figure (**217**), ou au son principal *l*, comme dans la figure (**220**).

Indépendamment de la dissonnance qui résulte de la confusion des sons, l'expression de ces accords présente une incohérence marquée. L'expression simultanée des trois sons, *s*, *r* et *l*, espacés de deux quintes superposées fait jouer au son *r* en même temps le rôle de dominante et de fondamentale.

Les accords (**217**) et (**220**) sont appelés accords de neuvième de dominante. L'impression du support réel étant toujours prépondérante, la forme (**220**) quoique utilisable, est peu employée.

§ 3. — Accords de neuvième, majeurs et mineurs.

Considérons les groupes (**45**) $A\ I\ p = 4$ et (**48**) $A\ I\ p = 4$; prenons tout d'abord le premier et voyons comment il se pose sur l'échelle des cadences : Nous le trouvons à deux places :

$$\begin{array}{ccccccc} \leftarrow & \cdot & \rightarrow & & \leftarrow & \cdot & \rightarrow \\ s & l & t & \text{et} & d & r & m \\ \left(\frac{8}{9}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{10}{9}\right) & & \left(\frac{8}{9}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{10}{9}\right) \end{array} \qquad (\mathbf{221})$$

Envisageons la première des deux positions et examinons comment finalement se résout le mouvement général des sons. Le son *l* se dédouble et donne les deux sons *s* et *t* séparés par la tierce majeure, le son *t* fait alors une chute sur *s*. Tout le mouvement se résout directement sur *sol* en vertu des intervalles originaux complets $\left(\frac{9}{8}\right)$ et $\left(\frac{5}{4}\right)$. On complète par les autres sons indicateurs qui convergent également sur *s* moyennant des intervalles originaux complets et on tombe finalement sur la formation (**216**) et (**217**).

$$s \quad t \quad r \quad f \quad l$$

de manière à constituer l'accord de neuvième de dominante déjà obtenu.

Envisageons la seconde des deux positions de la figure (**221**), toujours sur l'échelle des cadences, et remarquons que le groupe des trois sons obtenus ainsi peut être rattaché aux considérations des cadences élidées et partielles. C'est le dédoublement du n° 1 du § 11, chap. VII, dédoublement qui s'effectue en raison d'un pivot placé à une quarte au-dessus du son à dédoubler, qui est ici *r* et qui donne *s* pour ce pivot. L'opération de dédoublement s'étant faite en raison des cadences résultant du pivot *s* sur *d*, il convient d'y joindre le son *t* qui donne l'autre cadence élidée. On obtient :

$$\begin{array}{ccccc} t & d & r & m & s \\ \rightarrow & \leftarrow & \cdot & \rightarrow & \end{array} \qquad (\mathbf{222})$$

série dans laquelle tous les sons convergent sur *d*, moyennant le pivot *s*. Cette combinaison s'écrit :

(**223**) *d m s t r*

Elle est formée par la superposition de deux accords parfaits successifs. L'accord obtenu est désigné sous le nom de accord de neuvième majeur.

Il convient de remarquer que, dans la figure (**222**), les trois sons *t*, *d* et *r* sont placés dans la position du premier groupe de la figure (**213**). En partant de ce dernier on aurait donc abouti à une formation semblable à celle de la figure (**223**). Le groupement de trois sons (**45**) $A\ I\ p = 4$ sert donc de transition aux mouvements qui peuvent se faire sans pivot, avec les empreintes directes, ou avec pivot sur les empreintes additionnelles. C'est pour cela du reste que les empreintes 9 et 10 ont été appelées mixtes.

Enfin, au lieu de considérer exclusivement l'échelle des cadences, comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous pouvons encore constater que le groupe (**45**) $A\ I\ p = 4$ se pose sur l'échelle diatonique, non seulement sur les sons $d \overset{r}{+} m$, mais encore sur les sons *f s l*, de sorte que l'accord de neuvième majeur considéré porte en deux endroits de l'échelle diatonique, savoir :

(**224**)

d . m . s . t . r

f . l . d . m . s

Après avoir considéré le premier groupement (**45**) $A\ I\ p = 4$, nous allons prendre le second (**48**) $A\ I\ p = 4$. Nous le poserons d'abord sur l'échelle des évolutions, en *f s l*, et nous remarquerons que tout le mouvement se trouve suspendu au son *l* ; considérée au point de vue des intervalles complets pris en eux-mêmes, la combinaison aboutit aux formes déjà trouvées (**219**) et (**220**) pour l'accord de neuvième de dominante ; considérés au point de vue des mouvements effectués sur pivots, les sons se posent sur *d r m* de l'échelle des évolutions, le pivot est *l*. La combinaison doit être associée à la seconde de la figure (**213**) et on obtient :

←— · —→←—

(**225**) *l . d r m f . l*

qui donne finalement :

(**226**) *r . f . l . d . m*

combinaison formée de deux accords parfaits mineurs superposés. L'accord obtenu est désigné sous le nom d'accord de neuvième mineur.

Considérés sur l'échelle diatonique, les sons se posent non seulement sur *d r m*, mais encore sur *s l t*, de sorte que l'accord considéré se place de deux manières sur l'échelle diatonique, savoir :

(**227**)

r . f . l . d . m

l . d . m . s . t

§ 4. — **Accords de neuvième de médiante et de sensible.**

Il ne nous reste plus, pour épuiser la série utilisable des groupes de trois sons, qu'à envisager les groupements de la figure (**214**). Considérons tout d'abord le second de ces deux groupements, qui se place sur l'échelle des cadences. avec les sons *r m f*. Les sons indicateurs des intervalles différentiels $\left(\frac{10}{9}\right)$ et $\left(\frac{21}{20}\right)$ sont *t*, à $\left(\frac{3}{4}\right)$ au-dessous de *m*, et *s* à $\left(\frac{6}{5}\right)$ au-dessus de *m*. Le premier son *t*, pris comme pivot, fait avec le son *f* donné l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$, qui amène bien le son sur le *m* par attraction avec un déplacement $\left(\frac{20}{21}\right)$. Le second pivot *s* fait avec *f* l'intervalle $\left(\frac{8}{7}\right)$. Il conduit aussi le *f* sur *m* par attraction avec le même déplacement. Les deux pivots *t* et *s* sont l'un à une tierce mineure au-dessous de *r* et l'autre à une quarte au-dessus. Le son *ré* est donc bien amené à se déplacer par attraction en montant de $\left(\frac{10}{9}\right)$.

(**228**)

——→ ←——

t	.	*r*	*m*	*f*	*s*
$\left(\frac{3}{4}\right)$		$\left(\frac{9}{10}\right)$	$\left(\frac{1}{1}\right)$	$\left(\frac{21}{20}\right)$	$\left(\frac{6}{5}\right)$

Tous ces sons sont mentionnés sur la figure (**228**) ; ils peuvent se mettre sous la forme :

(**229**) *m . s . t . r . f*

C'est l'accord de neuvième de médiante.

Si on traite de la même manière le premier des deux groupes (**214**), dont les sons se posent sur l'échelle des évolutions, on trouve que les trois sons combinés avec les sons indicateurs convenables donnent :

(**230**)

$$\overset{l}{\left(\frac{5}{6}\right)} \quad \overset{t}{\left(\frac{20}{21}\right)} \quad \overset{d}{\left(\frac{1}{1}\right)} \quad \overset{r}{\left(\frac{10}{9}\right)} \quad . \quad \overset{f}{\left(\frac{4}{3}\right)}$$

que l'on met sous la forme :

(**231**) $t \quad . \quad . \; r \quad . \quad f \quad . \quad l \quad . \quad d$

C'est l'accord de neuvième de sensible.

§ 5. — Il n'y a pas d'accords de plus de cinq sons.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer au § 1, nous ne pouvons pas utiliser les groupes de dédoublement ou de concentration supérieurs à ceux que nous avons considérés. C'est qu'en effet nous serions obligés de nous servir de l'intervalle $\left(\frac{15}{14}\right)$ qui est une inflexion harmonique de l'intervalle chromatique ; savoir :

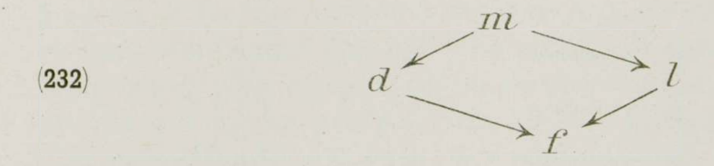
$$\left(\frac{15}{14}\right) = \left(\frac{25}{24}\right) + \left(\frac{36}{35}\right)$$

L'intervalle $\left(\frac{15}{14}\right)$ n'existe donc pas sur l'échelle, puisque $\left(\frac{25}{24}\right)$ forme l'intervalle chromatique de l'échelle diatonique. Nous ne pouvons donc pas utiliser les groupements supérieurs. Il n'y a donc pas d'accords que l'on puisse déduire de la théorie des trois sons, et qui comporteraient plus de cinq sons.

§ 6. — **Accords de septième majeurs et mineurs.**

Partons d'un son *m* de l'échelle diatonique et dédoublons conformément à (**46**) *A P m* ; nous trouvons deux sons *d* et *l*. Concentrons ensuite ces deux sons *d* et *l* selon (**47**) *A P M*, on obtient :

(**232**)



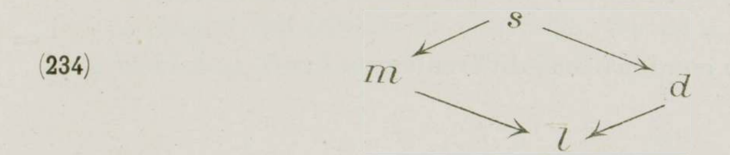
Les quatre sons obtenus naissent en définitive des deux accords parfaits consécutifs *d m l* et *d f l*. Ils peuvent être groupés comme sur la figure (**233**) :

(**233**) *f* . *l* . *d* . *m*

C'est l'accord de septième majeure, avec *mi* pour son préalable et *f* pour son final.

Si on part de même d'un son *s* de l'échelle diatonique qu'on dédoublerait sur *m* et *d* selon la figure (**101**), chap. VII, § 8, sons que l'on concentrerait de nouveau sur *l* selon la figure (**102**), chap. VII, § 8, on trouve :

(**234**)



Ces quatre sons naissent des accords parfaits *m s d* et *m l d*, on peut les grouper :

(**235**) *l* . *d* . *m* . *s*

C'est l'accord de septième mineur, avec *s* son préalable et *l* son final.

§ 7. — **Nomenclature des accords.**

1° Accords de trois sons.	*a*	majeurs parfaits	*d m s*	*f l d*	*s t r*
	b	mineurs parfaits	*l d m*	*r f l*	*m s t*
	c	mixte	*t r f* ou	*s♯ t r*	
2° Accords de quatre sons.	*a*	7ᵉ dominante	*s t r f*	*m s♯ t r*	
	b	7ᵉ sensible	*t r f l*	*r f l♭ d*	
	c	7ᵉ diminuée	*s♯ t r f*	*t r f l♭*	
	d	7ᵉ majeur	*f l d m*	*d m s t*	
	e	7ᵉ mineur	*r f l d*	*l d m s*	*m s t r*
3° Accords de cinq sons.	*a*	9ᵉ dominante	*s t r f l*		
	b	9ᵉ dominante mineur	*m s♯ t r f*	*s t r f l♭*	
	c	9ᵉ sensible	*t r f l d*		
	d	9ᵉ médiante	*m s t r f*		
	e	9ᵉ sensible mineure	*s♯ t r f l*	*t r f l♭ d*	
	f	9ᵉ majeur	*f l d m s*	*d m s t r*	
	g	9ᵉ mineur	*r f l d m*	*l d m s t*	

Cela correspond à quinze combinaisons différentes.

§ 8. — **Génération des accords. — Son préalable, préparation. — Son final, fondamentale.**

Nous remarquons qu'on peut former tous les accords, de trois, de quatre ou de cinq sons, en considérant sur l'échelle la série de trois, quatre ou cinq sons espacés successivement de tierces superposées. Présenté ainsi,

c'est-à-dire sous la forme que nous avons donnée dans la nomenclature, on dit que l'accord est à l'état générateur.

Si on se reporte, pour chacun des accords, aux schémas qui ont servi à les obtenir, on remarque que le son le plus élevé de l'accord générateur se présente toujours le premier, tandis que le plus grave se présente toujours le dernier, c'est le son final. Somme toute, l'ordre de la génération des sons d'un accord va, dans le sens direct, du son élevé au son grave de l'accord générateur. Le son le plus grave se nomme fondamentale, parce que c'est le son final. Le ou les sons au-dessus des trois sons graves de l'accord générateur est ou sont dissonnants avec les trois autres, ils sont préalables, pour éviter la confusion et pour éviter aussi les incohérences dont nous allons parler, ils doivent être exprimés les premiers. C'est ce qu'on appelle faire la préparation d'un accord dissonnant. Dans les accords de trois sons, la préparation n'est pas nécessaire à cause de la consonnance, bien que, pour ces accords, comme pour tous les autres, l'ordre de génération des sons suive, en descendant, ceux que marque l'accord générateur.

§ 9. — **Incohérences à signaler.**

Les incohérences à signaler avec les accords dissonnants sont tellement nombreuses qu'il faut renoncer à les indiquer toutes, sous peine de se perdre dans des détails souvent sans intérêt. Il suffit que l'on sache les déterminer, autant que de besoin, sur chaque accord pris en particulier.

Il y a d'abord l'incohérence qui résulte des deux quintes superposées dans la plupart des accords de neuvième. On peut signaler une incohérence de même forme dans l'accord de 7ᵉ majeur

f l d m

Le *do* forme avec le *fa*, d'une part une quinte descendante, et avec le *mi* d'autre part une tierce majeure ascendante. Or la quinte descendante est un parcours direct et la tierce majeure montante un parcours indirect, il y a donc incohérence à l'égard du pivot *d*. Il y a une incohérence analogue sur le pivot *l* avec la tierce majeure descendante *f l* et la quinte montante *l m*.

L'accord de septième de dominante *s t r f* et l'accord de 7ᵉ de sensible *t r f l* ne présentent aucune incohérence, mais simplement de la dissonnance.

Cette dissonnance est plus marquée dans le second que dans le premier, parce que les sons indicateurs des intervalles, bien que donnant des indications concordantes dans les deux cas, se réfèrent pour le premier au support réel et pour le second au support virtuel.

Les incohérences se manifestent non seulement avec les intervalles originaux, mais encore avec les intervalles différentiels. Prenons comme exemple l'accord de septième mineur *r f l d* : L'intervalle de *l* à *d*, si on se réfère au son indicateur *r* serait $\left(\frac{7}{6}\right)$, si on se réfère au contraire au son indicateur *f* on trouverait $\left(\frac{6}{5}\right)$. Comme le sens du parcours est différent suivant qu'il s'agit de $\left(\frac{7}{6}\right)$ ou de $\left(\frac{6}{5}\right)$, on voit qu'il y a aussi incohérence ; mais comme il s'agit d'intervalles différentiels, l'incohérence est consécutive de la confusion qui résulte de la dissonnance.

Ces quelques indications suffisent pour guider les recherches d'incohérence dans tous les cas où elles peuvent se présenter. L'incohérence disparaît avec la préparation. C'est qu'en effet les difficultés dues à l'incohérence ne viennent que de la simultanéité de mouvements directs et indirects. C'est cette simultanéité seule qui est impossible, dès qu'il y a préparation, c'est-à-dire quand il n'y a plus simultanéité dans les mouvements, il n'y a plus d'incohérence. La dissonnance et l'incohérence s'unissent donc pour réclamer la préparation des accords dissonnants.

A l'égard de l'incohérence qui résulte de la superposition des deux quintes dans l'accord de neuvième, nous pouvons faire des observations tout à fait analogues à celles qui ont été développées au § 11 du chap. XII. Considérons par exemple l'accord de neuvième majeur figurant sous la lettre *f* dans la série des accords de cinq sons, et conservons seulement les sons incohérents extrêmes *f* et *s*, avec le pivot de l'incohérence *d*, nous aurons :

f · · · *d* · · · *s*

Pour caractériser davantage l'incohérence, renversons les sons *s* et *f* de

s · · *d* · · *f*

manière à former deux quartes superposées dont la direction est encore plus accusée que celle de la quinte. Envisageons les sons *s* et *f* émis simultanément en dehors du son *d*, notre oreille prendra cet intervalle, qui est dans une position définie, pour $\left(\frac{7}{4}\right)$ conformément à ce que nous avons expliqué à propos des sons indicateurs. Mais si l'on fait intervenir le son *d* en même

temps que *s* et *f*, la question change complètement ; bien que les sons réels *s* et *f* n'aient pas été modifiés, l'incohérence apparaît immédiatement, parce que les deux intervalles de quartes superposées nous obligent à prendre l'intervalle de *s* à *f*, non plus pour $\left(\frac{7}{4}\right)$ mais pour $\left(\frac{16}{9}\right)$. Cette simple modification de $j = \left(\frac{16}{9}\right) - \left(\frac{7}{4}\right)$, non pas dans les sons réels qui restent les mêmes, mais dans les sons repérés, signale une dissonnance très caractérisée à cause de l'incohérence d'où elle découle.

L'incohérence et la dissonnance se résolvent simultanément de bien des manières :

(234)

s . . . d . . f
s d m
f l d f

ou bien

(235)

s d f
l d f
s ♭ t r s

ou bien

(236)

s d f
s t r f
d m

etc.

CHAPITRE XIV

La Tonalité

§ 1. — Les accords parfaits indiquent un état harmonique.

Les accords parfaits constituent les seuls groupes de trois sons consonnants. Seuls ils peuvent définir un état harmonique selon la théorie des trois sons. Les sons naissent, pour l'accord parfait comme pour tous les autres, dans l'ordre des sons de l'accord générateur en descendant. Il est inutile de les exprimer dans leur ordre d'apparition, puisque la consonnance laisse tous les sons distincts, mais suivant que l'accord est représenté dans tel ou tel de ses états, il apparaît comme stable ou instable, selon ce qui a été dit au chap. VIII, § 4.

§ 2. — Les accords dissonnants indiquent un mouvement de deux accords.

Considérons les accords à cinq sons définis au § 3 du chap. précédent, et envisageons notamment la figure (223) comprenant l'accord *d m s t r*. Ainsi que nous l'avons remarqué, il est formé de deux accords parfaits superposés. Les sons dissonnants devant être préparés, c'est comme si l'on émettait au

préalable l'accord supérieur, puis ensuite l'accord inférieur. L'accord (**223**) correspond donc à l'expression consécutive de deux accords, le premier faisant cadence sur le second.

Si on envisage de la même manière l'un quelconque des accords de la figure (**227**) on aboutit à la même conclusion, bien que la cadence soit moins parfaite. L'accord *m s t* fait bien cadence sur *l d m*, mais pour que la cadence mineure fût parfaite, il faudrait hausser le *sol* d'un demi-ton chromatique pour obtenir la cadence mineure ; au lieu d'avoir l'accord de cinq sons *l d m s t* on aurait $l\ d\ m\ \underset{\sharp}{s}\ t$ qui présente l'incohérence $d\ m\ \underset{\sharp}{s}$.

Considérons encore les accords à quatre sons mentionnés au § 5 du chapitre précédent, on voit que la figure (**232**) équivaut à l'énonciation successive des deux accords *d m l* et *d f l* ; de même la figure (**234**) équivaut à l'énonciation successive des deux accords *m s d* et *m l d*. Dans ces deux mouvements, la fondamentale descend d'une tierce majeure ou mineure.

On conclut de ce qui précède que les accords à cinq et à quatre sons correspondent, du moins, pour ceux que nous avons envisagés, à des mouvements d'accords parfaits effectués selon les intervalles consonnants : quinte ou quarte pour les premiers, et tierces majeures ou mineures pour les seconds.

On aurait pu faire, en se basant sur ces considérations, la théorie de la génération des accords par tierces superposées, en commençant l'énonciation des sons par les supérieures. On aurait obtenu les résultats que nous avons donnés, mais avec moins de généralité.

Considérons en effet cinq sons $\alpha\ \beta\ \gamma\ \varsigma\ \varepsilon$ formant un accord dans la position génératrice. Le mouvement que nous avons indiqué correspond aux énonciations successives

(**237**)
$$\begin{array}{ccccc} & & \gamma & \varsigma & \varepsilon \\ \alpha & \beta & \gamma & & \end{array}$$

En se reportant aux schémas qui ont servi à constituer les accords de cinq sons, on vérifie que le mouvement indiqué par la figure (**237**) s'accorde avec la génération de l'accord.

De la même manière, avec un accord de quatre sons, le mouvement que nous avons indiqué correspond aux énonciations successives

(**238**)
$$\begin{array}{cccc} & \beta & \gamma & \varsigma \\ \alpha & \beta & \gamma & \end{array}$$

En se reportant aux schémas qui ont servi à former les accords de quatre sons, on vérifie que le mouvement (**238**) s'accorde avec la génération de l'accord.

C'est dans ce sens que l'on peut dire qu'un accord dissonnant indique un mouvement de deux accords.

Toutefois, lorsqu'un accord, même dissonnant, ne présente aucune incohérence, la nécessité de la préparation ne s'impose pas impérieusement. Cette circonstance ne se présente que pour l'accord de septième de dominante que l'on peut considérer comme formant un état harmonique suffisamment défini, sans aucune contradiction ni incohérence, par les sons indicateurs de l'accord même.

§ 3. — **Les quatre lyres**.

Envisageons les accords de neuvième majeure, et en particulier l'accord *f l d m s*. Les sons principaux qui le constituent sont : *f*, *d* et *s*. Ces sons mettent en évidence l'intervalle dissonnant $\left(\frac{9}{8}\right)$ entre *f* et *s*, formé par la différence de quinte et quarte. Ce petit intervalle est donc caractérisé par le pivot *d*, figure (**239**).

(**239**) *d* · *f* *s* *d*

Cette formation constitue ce que nous appelons la lyre du ton majeur $\left(\frac{9}{8}\right)$.

Envisageons de la même manière l'accord de septième majeur, soit *f l d m*, qui caractérise le demi ton diatonique $\left(\frac{16}{15}\right)$ entre *m* et *f*. Ce demi-ton, avec ses pivots *d* et *l* forme, moyennant la figure (**240**) la lyre du demi-ton diatonique.

(**240**) *d* · *m* *f* *l*

L'accord de septième mineure, soit par exemple *l d m s* consacre entre *s* et *l* l'intervalle $\left(\frac{10}{9}\right)$ caractérisé par la lyre (**241**) :

(**241**) *m* *s* *l* *d*

c'est la lyre du ton mineur $\left(\frac{10}{9}\right)$.

Enfin, nous ajoutons à ces lyres, celle que nous appelons chromatique, et qui résulte des explications du § 5, chap. XI, soit par exemple :

(**242**)	soit :	*r*	*f*	*f* ♯	*l*
	soit :	*s*	*t* ♭	*t*	*r*

Ces diverses lyres constituent les expressions tonales par excellence, à l'égard de l'échelle diatonique, c'est-à-dire à l'égard du mouvement des accords.

On se souvient que l'échelle diatonique a été formée au moyen des sons conjugués du nombre

$$45 = 3^2 \times 5$$

Décomposons ce nombre en deux facteurs de toutes les manières possibles, nous n'en trouvons que trois, savoir :

1°	9×5
2°	3×15
3°	1×45

Considérons le premier groupe 9×5 et envisageons en particulier le nombre 9. On trouve que ce nombre 9 comporte les sons conjugués suivants :

1 3 9

qu'on peut disposer de la manière suivante, en serrant les intervalles, pour faire apparaître le ton majeur $\left(\frac{9}{8}\right)$; 1 sera multiplié par 2^3 ; 3 sera multiplié par 2 et par 2^2, savoir :

6 8 9 12

Le son 3 primitif se trouve ainsi répété deux fois avec 6 et 12. Ces quatre nombres peuvent se poser, sur l'échelle diatonique, de la manière suivante :

d f s d

C'est donc la lyre (**239**) qui apparaît. Mais nous n'avons utilisé, pour former cette lyre, que le facteur 9. Si on considère en outre le facteur 5, ou, ce qui revient au même $\left(\frac{5}{4}\right)$, on devra le combiner avec la lyre ci-dessus, ce qui donnera quatre autres sons à une tierce majeure au-dessus des premières, savoir :

m l t m

L'échelle diatonique se trouve donc constituée par l'ensemble des deux lyres de ton majeur de la figure (**241**) :

	d	.	*f*	*s*	.		*d*	
(**241**)		*m*			*l*	*t*		*m*
	d	*m*	*f*	*s*	*l*	*t*	*d*	*m*

qui donne tous les sons de l'échelle, sauf le son de liaison *r* bien entendu.

Envisageons de la même manière le second groupe de facteurs, et considérons en particulier le facteur 15 qui donne les quatre sons conjugués suivants :

1 3 5 15

qu'on transforme en $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}$ et $\frac{15}{16}$, c'est-à-dire 16, 20, 12 et 15, il vient en les mettant par ordre de grandeur :

12 15 16 20

Ces quatre nombres peuvent se placer sur l'échelle diatonique de la manière suivante :

d · *m* *f* *l*

c'est la lyre du demi-ton diatonique.

Si on considère le facteur 3 qui, joint à 15, donne le produit 45, ou, ce qui revient au même, le facteur $\frac{3}{2}$, on devra le combiner avec les sons de la lyre ci-dessus, ce qui donnera quatre autres sons à une quinte au-dessus des premiers :

s · *t* *d* *m*

qui est encore une lyre du demi-ton diatonique.

La combinaison de ces deux lyres donne les sons de l'échelle diatonique de la manière suivante :

d · *m* *f* · *l*

(**242**) *s* · *t* *d* · *m*

---

d · *m* *f* *s* *l* *t* *d* · *m*

La troisième série de facteurs 1×45 donne l'échelle de diatonique proprement dite

1 3 5 9 15 45

Mais parmi les sons qui la composent, nous devons éliminer les sons extrêmes 1 et 45 qui sont sans rapports directs, si on se limite au facteur premier 5 comme nous l'avons fait. Il reste alors :

3 5 9 et 15

qu'on change en 24, 20, 18 et 15 ; il vient, en les mettant par ordre de grandeur :

15 18 20 24

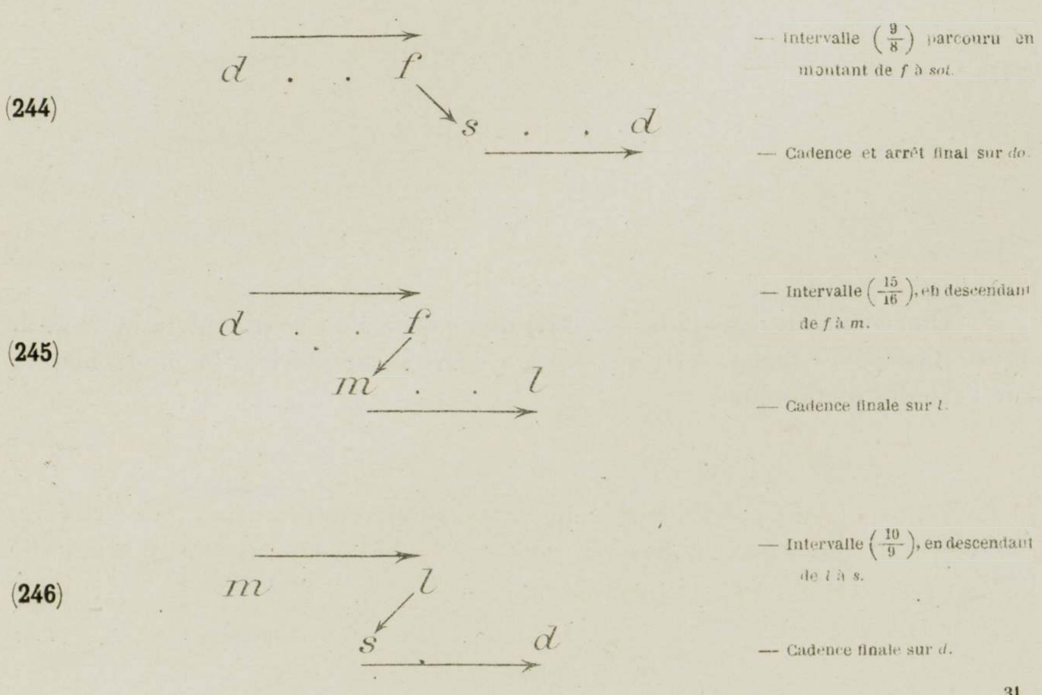
Ces quatre nombres peuvent se placer sur l'échelle de la manière suivante :

(**243**) *m* *s* *l* *d*

C'est la lyre du ton mineur, qui ne se trouve qu'en une seule position sur l'échelle, si on fait abstraction du son *r*.

Quant à la lyre chromatique, elle ne peut naturellement pas se placer sur l'échelle diatonique.

Lorsqu'on fait parcourir à un son les différentes positions d'une lyre, de manière à passer pour chacune d'elles par le petit intervalle qu'elle sert à définir, on dit que le parcours est direct quand il conduit au repos à la fin du parcours. Les parcours directs des diverses lyres sont les suivants :

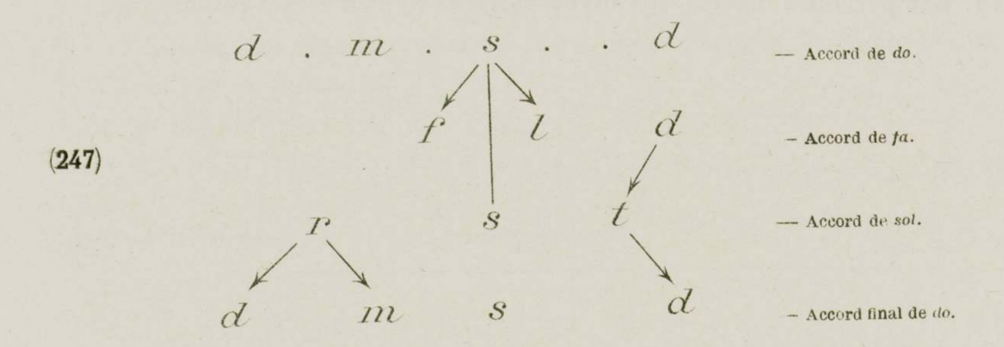


§ 4. — Mouvements des accords parfaits, dans le sens direct, suivant les intervalles diatoniques.

Les mouvements directs des accords parfaits suivant les intervalles consonnants sont précisément ceux qui sont accusés par les accords dissonnants de quatre et de cinq sons. Ce sont les mouvements de tierces en descendant, ou de quinte et quarte suivant la cadence. Quand nous disons mouvements de tierces en descendant, nous comprenons en même temps les mouvements de sixtes en montant ; c'est le même intervalle général.

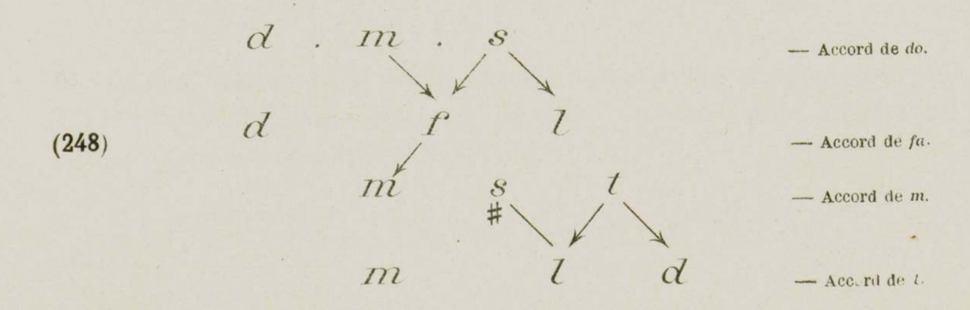
En ce qui concerne les mouvements directs des accords suivant les intervalles de seconde, il y a lieu de se référer purement et simplement au mouvement direct énoncé sur chacune des lyres indicatrices des intervalles. Les mouvements directs des accords suivant le ton majeur $\left(\frac{9}{8}\right)$ se font en montant. Ils se font en descendant soit pour le ton mineur $\left(\frac{10}{9}\right)$, soit pour le demi ton diatonique. Les figures (**247**), (**248**), (**249**) rendent compte de ces mouvements :

(**247**)



On reconnaît, dans la figure (**247**) une expression semblable à celle de la figure (**188**) du § 3, chap. XII, qui nous a servi à caractériser le mode majeur sur l'échelle diatonique :

(**248**)



C'est un mouvement nouveau. On aurait pu, sur la troisième ligne, maintenir le *sol* sans dièze, pour conserver le sillon *s* du premier accord. Avec $\underset{\sharp}{s}$ la cadence est mieux marquée sur l'accord final. C'est une cadence mineure.

(**249**)

m . $\underset{\sharp}{s}$. *t* — Accord de *mi*.
m *l* . *d* — Accord de *la*.
s *t* *r* — Accord de *sol*.
s *d* *m* — Accord de *do*.

C'est également un mouvement nouveau. On aurait pu, comme ci-dessus, maintenir *s* au lieu de $\underset{\sharp}{s}$ à la première ligne.

Dans les trois mouvements des figures (**247**), (**248**), (**249**), on aurait pu supprimer l'accord de la première ligne. Ce premier accord ne figure en effet que pour marquer la cadence indiquée par le mouvement des deux premiers sons de chaque lyre. Mais cette cadence existe dans les sons particuliers de chacun des seconds accords, il est inutile de la reproduire. On peut donc écrire :

(**250**)

f . *l* . *d* — Seconde $\left(\frac{9}{8}\right)$, en montant.
r . *s* *t*
d *m* *s* *d*

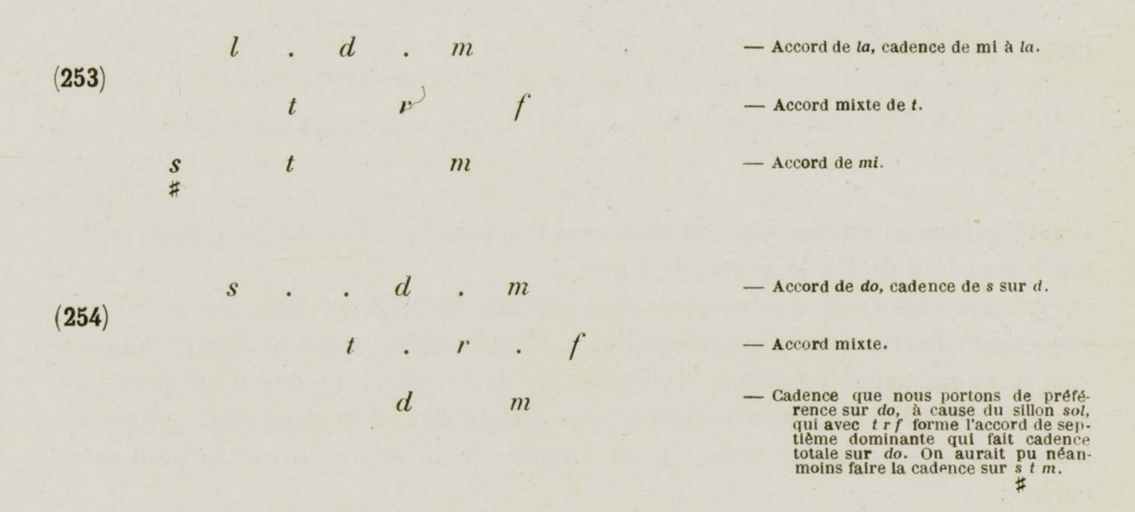
(**251**)

d . *f* *l* — Seconde $\left(\frac{15}{16}\right)$, en descendant.
m $\underset{\sharp}{s}$ *t*
m *l* *d*

(**252**)

m *l* *d* — Seconde $\left(\frac{9}{10}\right)$, en descendant.
s *t* *r*
s *d* *m*

Tels sont les mouvements directs que peuvent prendre les accords dans le sens direct, conformément aux intervalles diatoniques. Ajoutons toutefois les mouvements de seconde majeur et de seconde mineur qui touchent à l'accord mixte *t r f*. Empruntons pour cela les secondes lyres des figures (**241**) et (**242**), on obtient naturellement :



Avant de quitter ce sujet, faisons une dernière remarque. Dans la figure (**250**) rien ne signale à l'avance le sillon du *m* du dernier accord, on aurait donc pu indiquer l'accord avec $\underset{\flat}{m}$ pour obtenir un accord mineur. Mais nous pouvons opérer sur d'autres sons, pour obtenir le même effet, sans sortir des degrés de l'échelle. Rapportons la seconde lyre de la figure (**241**) au mode mineur, mode dans lequel les sons conjugués du mode majeur se correspondent, mais en changeant les fondamentales en dominantes et inversement. La lyre des fondamentales correspondant aux dominantes *m l t m* serait obtenue en prenant les sons à une quinte au-dessous, ce serait : *l r m l*. Etablissons sur cette dernière le mouvement correspondant à la figure (**250**), on trouve :

(**255**)

```
                 r  .  f  .  l

          t  .  .  m     s
        ↙   ↘      |     # ↘
       l      d    m         l
```

C'est en définitive le mouvement qui nous a servi, avec la figure (**196**) du § 6, chap. XII, pour caractériser le mode mineur.

§ 5. — Les accords ne peuvent se mouvoir suivant l'intervalle chromatique.

Considérons la lyre chromatique, dans laquelle il n'entre de cadence qu'entre les sons extrêmes. On voit immédiatement que les seuls mouvements directs que l'on puisse faire sont des mouvements de chute, conformément aux figures (**256**) et (**257**) :

(**256**)

$$\begin{array}{ccc} & \overleftarrow{\quad f \;\cdot\; l \quad} & \\ r & f_{\sharp} & \end{array}$$

(**257**)

$$\begin{array}{ccc} & \overleftarrow{\quad t \;\cdot\; r \quad} & \\ s & t_{\flat} & \end{array}$$

Si on suit de pareils mouvements, en attribuant au son des lyres le rôle de fondamentales d'accords parfaits réels, on s'aperçoit que de nombreux sons sortent des sillons de l'échelle ; ces mouvements seraient en outre très faibles, n'ayant que des mouvements de chute pour les guider, sans l'assistance d'aucune cadence ; enfin il y aurait une incohérence complète dans le mouvement. Le pivot du mouvement qui est la médiante dans l'espèce, comporte un mouvement direct sur support réel pour un accord et sur support virtuel pour l'autre.

$$\begin{array}{ccc} f \;\cdot & l \;\cdot & d \\ f_{\sharp} & l & d_{\sharp} \\ \left(\frac{4}{5}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{6}{5}\right) \\ \left(\frac{5}{6}\right) & \left(\frac{1}{1}\right) & \left(\frac{5}{4}\right) \end{array}$$

Il en est autrement s'il s'agit d'utiliser l'accord mixte :

	f .		*l* .		*d*
		f♯		*l*	*d*
r		*f♯*		*l*	

Les accords parfaits ne peuvent donc pas se mouvoir suivant l'intervalle chromatique, si ce n'est en utilisant l'accord mixte. Dans ce cas, un son au moins sort des degrés de l'échelle.

§ 6. — **Harmonie consonnante.**

L'harmonie consonnante a pour objet l'étude des mouvements des accords consonnants. Ces mouvements s'exécutent comme il a été indiqué aux § précédents.

En principe, les mouvements effectués conformément aux intervalles consonnants s'opèrent de la manière suivante : 1° Une concentration directe ou indirecte sur un des sons ; 2° Un dédoublement du son obtenu. Ces deux mouvements forment ce qu'on peut appeler le mouvement par masse. Quant au mouvement individuel des sons, il résulte en général des attractions que le pivot choisi provoque sur les sons primitifs. Ces sons doivent être en tout cas placés de manière à éviter ou tout au moins à masquer les défauts d'incohérence et d'incompatibilité. C'est l'objet des règles de l'harmonie, dont les principales se justifient avec ce que nous avons dit de l'incohérence dans le chapitre des cadences.

Quant aux mouvements suivant les intervalles dissonnants, ils se font conformément aux indications que nous avons données à propos des lyres.

§ 7. — **Incohérences à signaler.**

Les mouvements des accords par quinte ou par quarte se font aussi bien dans le sens direct que dans le sens indirect, sans qu'il résulte d'incohérence provenant du mouvement lui-même.

Les mouvements par tierces se font de préférence dans le sens direct. Dans ce cas la cadence porte sur un son nouveau, aucune incohérence n'en résulte. Dans le sens indirect, la cadence du second accord se fait sur la médiante du premier, c'est une légère incohérence qu'il faut masquer par une disposition convenable des sons.

Les mouvements par seconde provoquent toujours des incohérences dans le sens indirect. Nous l'avons déjà signalé plusieurs fois, à propos de la descente de $\left(\frac{8}{9}\right)$: n° 5, § 14, ch. VII. On ne peut pas en principe passer de l'accord de *sol* à l'accord de *f*, ou si on le fait, il faut masquer l'incohérence avec le plus grand soin, en plaçant le son sur lequel elle se produit le plus au centre possible de l'état harmonique.

Quand on opère en montant de $\left(\frac{10}{9}\right)$, nos organes admettent non pas $\left(\frac{10}{9}\right)$ pour le mouvement, mais $\left(\frac{9}{8}\right)$. Ainsi dans la formation (**258**) qui est

(**258**)
s . *t* . *r*
m . *l* *d*

le mouvement inverse de (**252**), la différence de *s* à *l* se mesure sur le son *r* du premier accord. Dans la forme (**252**) au contraire la différence de *s* à *l* se mesure sur les sons *m* et *d* du premier accord. Dans le premier cas nous prenons l'intervalle pour $\left(\frac{9}{8}\right)$ et dans le second nous le prenons pour $\left(\frac{10}{9}\right)$. C'est une des rares circonstances, sinon la seule où le comma mineur intervienne pour établir une différence caractérisée entre deux intervalles.

§ 8. — **Résolution des accords dissonnants.**

La résolution de l'accord de septième de dominante se fait en cadence sur l'accord de tonique, nous l'avons vu assez souvent pour n'avoir pas à y revenir ; elle convient au mode majeur comme au mode mineur.

Les accords de quatre sons *c* et *d* de la nomenclature se résolvent de la même manière.

L'accord de neuvième de dominante se résoud conformément à ce qui a été dit à propos de la figure (**189**) du chap. XII, savoir :

(**259**)

f . *l* . . *r*
r . . *s* *t*
d *m* *s* . *d*

Accord de 9e dominante.

Résolution.

Il en est de même de l'accord de neuvième dominante mineure, dont la résolution se tire de la figure (**201**).

L'accord de septième diminuée se résoud selon la figure (**203**). L'accord de neuvième de sensible mineur suit la même voie.

L'accord de neuvième majeur se résoud selon les indications de la figure (**188**), savoir :

(**260**)

m . *s* . . *d*
f *l*
r . *s* *t*
d *m* *s* *d*

Accord de 9e majeur.

Résolution.

Quant à l'accord de neuvième mineur, sa résolution suit la progression de la figure (**196**) :

(**261**)

d . *m* . . *l*
r *f*
t *m* *s*
l *d* *m* ♯ *l*

Accord de 9e mineur.

Résolution.

Quant aux accords de septième majeurs et mineurs, ils se résolvent comme les précédents : Ainsi l'accord de septième majeur *f l d m* peut

d'abord être considéré comme un accord de neuvième incomplet dans lequel le son supérieur ferait défaut : Résolution semblable à (**260**).

(**262**)

m . *d* — Accord de 7e majeur.
f . *l*
r *s* *t* — Résolution.
d *m* *s* *d*

On peut le considérer comme un accord de neuvième incomplet dans lequel manquerait le son *r* inférieur, etc.

Toutes ces résolutions se traduisent en définitive par des mouvements d'accords parfaits par degrés conjoints qui aboutissent à une cadence finale pour marquer le repos. On remarque que, dans toutes les combinaisons, le son préalable dissonnant s'abaisse toujours d'un degré : exemples :

(**263**)
f *l* *d* *m* *s*
s *t* *r* *f*
d *m*

f *l* *d* *m*
s *t* *r* (**266**)
m *s* *d*

(**264**)
r *f* *l* *d* *m*
m *s*♯ *t* *r*
l *d*

r *f* *l* *d*
m *s*♯ *t* (**267**)
d *m* *l*

(**265**)
f *l* *d* *m*
f *l* *r*
m *s*♯ *t* *m*

r *f* *l* *d*
r *f* *s* *t* (**268**)
d *m* *s* *d*

Quant à l'accord de septième de sensible *t r f l* il peut se résoudre sur l'accord de tonique soit sur l'accord de septième dominante mineur, exemple :

(**269**)
t *r* *f* *l*
t *r* *m* *s*♯
l *d* *m* *l*

t *r* *f* *l*
d *m* *s* (**270**)

Enfin la résolution (**268**) peut évoluer au mineur, en changeant *s* en $\underset{\sharp}{s}$ dans le second accord :

(**271**)

	r	*f*	*l*	*d*
	r	*f*	$\underset{\sharp}{s}$	*t*
d	*m*		*l*	

Il nous est impossible de donner toutes les résolutions des accords dissonnants, il nous suffit de signaler dans quel esprit elles doivent se faire.

On voit par ce qui précède que l'harmonie dissonnante s'emploie à manier les accords, comme si on avait des successions d'accords de trois sons devant aboutir successivement à un état harmonique définitif. C'est ainsi que se caractérisent la tonalité et le mode.

§ 9. — Tonalité.

La notion de tonalité est constituée par l'ensemble de ce qui forme les modes, chap. XII ; les accords, chap. XIII, complété par ce qui a été exposé aux précédents paragraphes de ce chapitre. Cette notion peut se restreindre à un mode particulier, ou s'étendre à l'ensemble des modes qui posent sur la même échelle diatonique. Le passage par certains sons spéciaux à un mode n'altère pas nécessairement la signification du mode primitif. On peut en citer une foule d'exemples, notamment le mouvement indiqué par la figure (**272**).

(**272**)

d . *m* . *s*	— Accord tonal.
d *f* *l*	— Cadence sur *fa* majeur.
m $\underset{\sharp}{s}$ *t*	— Mouvement de seconde mineure.
m *l* *d*	— Cadence sur *la* mineur.
s *t* *r*	— Mouvement de seconde $\left(\frac{10}{9}\right)$
m *s* *d*	— Cadence sur l'accord tonal.

Le passage par le son $\underset{\sharp}{s}$ est une simple transition.
Il en serait de même pour le passage par le son $\underset{\flat}{l}$ avec le mode mixte.

De même, le mouvement, rappelé au § 2 pour définir le mode majeur de *do*, passe par le son *t*♭ sans que la tonalité de *f* en résulte nécessairement.

De même le mouvement de la figure (**190**) qui passe par *f*♯ ne s'applique pas à la tonalité de *sol*.

Bref, la tonalité prise dans son sens le plus général, comporte les mouvements d'accords que l'on peut faire sur l'échelle diatonique, ceux qui empruntent l'échelle des cadences et des évolutions, ceux qui en empruntent l'axe modal *s*♯ ou *l*♭ pour caractériser les modes sur l'échelle diatonique, et enfin ceux qui concernent les modes secondaires, le tout conformément au tableau (**273**).

	d	*r* +		*m*	*f*		*s*	*l* ♭	*l*		*t*	*d*				— Echelle majeure.
(**273**)				*m*	*f*		*s*	*s* ♯	*l*		*t*	*d*		*r* −	*m*	— Echelle mineure.
	d	*r* +		*m*	*f* −		*s*		*l* +	*t* ♭	*t*	*d*				— Echelle des cadences.
				m	*f*	*f* ♯	*s* −		*l* ·		*t* +	*d*		*r* −	*m*	— Echelle des évolutions.
	d	*r* +	*m* ♭		*f*		*s*		*l*		*t*	*d*				— Modes secondaires.
				m	*f*		*s*		*l*		*t*		*d* ♯	*r* −	*m*	

Chacun des sons joue son rôle selon celle des échelles à laquelle il appartient d'après les sons indicateurs qui fixent sa position ; nous en avons donné une idée succincte au § 3 pour le mode majeur et au § 7 pour le mode mineur.

Les diverses cadences d'accord que l'on peut faire en vertu des diverses formes de la figure (**273**), marquent les divers sons de la tonalité sur lesquels l'arrêt se marque naturellement. C'est ce qu'on peut appeler les bonnes notes du ton qui sont les suivantes : *d* · *f* · *s* · *l* · *r*.

Les sons *m* et *t* sont les mauvais degrés, surtout le son *t* qui forme ce qu'on nomme la sensible. Les mauvais degrés, considérés en eux-mêmes, donnent peu d'impulsion au mouvement des sons, ils sont faibles.

Les degrés de l'échelle diatonique conservent toujours la prééminence sur les sons de passage qu'on peut utiliser, à cause des sillons creusés par les mouvements des sons sur l'accord générateur. Les degrés de l'échelle sont donc essentiellement *d r m f s l t d*. Ce sont eux que marquent la notation.

Les sons de transition sont : *f*♯ *d*♯ *s*♯ et *t*♭ *m*♭ *l*♭.

On voit que les dièzes et les bémols se placent respectivement sur les sons conjugués.

f	avec	*t*
d	avec	*m*
s	avec	*l*

§ 10. — **Modulation**.

On dit que l'on fait une modulation quand le mouvement des sons est conduit de manière à passer d'une tonalité à une autre. Lorsque le mot tonalité est pris dans son sens le plus restreint, les explications données jusqu'ici et rappelées au § précédent à propos des bons degrés de l'échelle, montrent que les sons qui sont signalés le plus facilement sont *d f s l r*; on peut donc passer pour ainsi dire directement de la tonalité de *do* à l'une quelconque des quatre autres.

La simple altération des accords de l'échelle diatonique primitive, par mouvement chromatique, permet d'amener des modulations. Exemple :

	d	.	*m*	.	*s*	
	t		*m*		*s* ♯	la médiante est prise pour pivot
l	*d*		*m*		*l*	

On peut opérer de même sur toutes les médiantes des accords majeurs. On peut opérer d'une manière analogue sur les médiantes des accords mineurs. On peut faire la transformation inverse en s'arrangeant de manière que la fondamentale ou la dominante deviennent la médiante du nouvel accord. C'est en somme l'application de ce qui a été dit au § 10 du chap. XI. Pour donner l'impression d'une nouvelle tonalité, de simples transitions ne suffisent pas, ainsi qu'on l'a signalé au § 8. Il convient d'impressionner fortement l'oreille, en arrêtant les sons par des cadences accentuées sur des accords déterminés.

On peut encore utiliser les mouvements des accords par degrés

conjoints, en les opérant sur d'autres degrés de l'échelle que ceux sur lesquels ils se font pour rester dans la tonalité, exemples :

1° Mouvement de $\left(\frac{9}{8}\right)$

Normal	*f l d*	Transformation	*s t r*	
	r s t		*m l d*	
			♯	
	d m s d		*r f l r*	aboutit sur *ré*.
			♯	

2° Mouvement de $\left(\frac{10}{9}\right)$

Normal	*m . . l d*	Transformation	*t m s*	
	s t r		*r f l*	
			♯	
	m s d		*t r s*	aboutit sur *sol*.

3° Mouvement de $\left(\frac{16}{15}\right)$

Normal	*d . . f . l*	Transformation	*s . . d m*	
	m s t		*t r f*	
	♯		♯ ♯	
	d m l		*s t m*	aboutit sur *mi*.

Ce ne sont bien entendu que de simples exemples, qu'on peut appliquer encore à d'autres cas analogues.

On peut encore opérer sur un accord caractéristique de la tonalité, comme celui de septième de dominante, mais en prenant non pas la fondamentale pour pivot du mouvement, mais soit la dominante, soit la médiante, savoir :

Soit :	*s . t . r f*	
	l r f	
	♯	
	s t r s	

Soit :	*s . t . r . f*	
	f t r f	
	♯ ♯ ♯	
	m s t m	etc.

Enfin on peut se servir des accords dissonnants qui ont généralement plusieurs positions sur les degrés de l'échelle. On choisit celle des combinaisons qui conduit à une autre issue que la tonalité primitive. Exemple l'accord *f l d m* se place aussi sur *d m s t*. En prenant les mêmes résolutions pour ces deux accords, on est conduit à des tonalités différentes.

f	*l*	*d*	*m*	correspond à	*d*	*m*	*s*	*t*	
s	*t*	*r*				*r*	*f*♯	*l*	
s		*d*	*m*			*r*	*s*	*t*	

	f	*l*	*d*	*m*	correspond à	*d*	*m*	*s*	*t*	
	f	*l*	*r*			*d*	*m*		*l*	
m	*s*♯	*t*		*m*		*t*	*r*♯	*f*♯	*t*	etc., etc.

Nous pouvons arrêter là nos explications puisqu'en définitive il ne s'agit nullement de faire ici un traité d'harmonie, mais seulement d'en donner l'esprit de la méthode pour l'application de nos théories.

Nous verrons qu'on peut encore moduler autrement, par l'anharmonie.

§ 11. — **Les parties**.

Il n'entre pas dans notre cadre de donner les règles admises par l'harmonie pour le mouvement des sons. C'est le sujet même de l'harmonie qui sort des limites que nous nous sommes imposées. Nous ne pouvons pas, toutefois, nous dispenser de dire un mot pour montrer comment la question se lie à notre travail.

Lorsqu'on émet simultanément plusieurs sons, soit avec des voix, soit avec des instruments, on désigne sous le nom de partie la succession des sons émis par une même voix ou par un même instrument. Les sons qui composent une partie sont nécessairement soumis aux lois de l'attraction, ainsi qu'aux lois qui s'en déduisent et qui résultent de la théorie des trois sons avec toutes ses conséquences conformément à la périodicité, aux cadences et aux accords.

Quelle est, tout d'abord, l'importance des diverses parties ? Pour nous

en rendre compte, voyons déjà ce qui se produit dans l'oreille avec un son unique. Nous voyons à droite de la première empreinte une région des cordes qui est absolument vide d'empreintes, tandis qu'à gauche toutes les empreintes du son s'étendent jusqu'aux limites où le permet notre perception ; théoriquement ces empreintes occuperaient même toute cette région de l'oreille, sans les confusions que nous avons expliquées à propos de la consonnance et de l'adaptation. Ainsi, à droite de la première empreinte il y a la partie vide, et à gauche la partie pleine d'empreintes. Supposons que, en même temps que ce premier son, on en émette une série d'autres plus graves. La région vide demeure toujours vide ; la région pleine se remplit toujours davantage. Les empreintes personnelles du son le plus élevé sont donc toujours celles qui ressortent le mieux du côté de la partie vide, ce son le plus élevé percera donc au-dessus des autres et se distinguera d'une façon toute spéciale. Il suit de là que, en général, la partie haute joue un rôle important parmi les autres ; puisqu'elle est spécialement entendue et distinguée, elle doit présenter un intérêt et constituer ce qu'on appelle un chant.

Parmi les autres parties qui pénètrent de plus en plus dans la région pleine d'empreintes, il convient de signaler spécialement la partie la plus grave qu'on nomme la basse. Nous avons fait remarquer déjà, au § 4 du chap. VIII, comment le son le plus grave, dans l'expression d'un accord parfait, marquait l'instabilité, lorsque ce son grave est la dominante. Nous avons également appelé l'attention sur la nécessité de placer les sons d'une certaine manière, pour caractériser les intervalles qui sans cela ne le seraient pas ; il suffit de se reporter aux explications données au § 10 du chap. X pour comprendre le rôle que joue dans ce cas le son le plus grave d'un ensemble harmonique. Ce rôle vient précisément du fait que la basse est celui des sons qui pénètre le plus dans la région pleine. Il en résulte que les supports réels des divers intervalles de tous les sons avec cette basse portent sur des empreintes les plus rapprochées, c'est-à-dire ayant un numéro d'ordre moins élevé que sur les autres sons. Les empreintes de la basse sont donc celles qui définissent le mieux l'état harmonique. Le choix du son de la basse doit d'ailleurs tendre à ce but.

Les parties intermédiaires sont en général moins importantes. Elles complètent l'état harmonique. Cependant, à défaut de mouvement marqué dans les parties extrêmes, elles peuvent prendre quelque fois un certain intérêt.

Les mouvements des parties se font le plus souvent par attraction. Ces attractions résultent toujours d'un pivot formant son commun à deux états harmoniques consécutifs. Nous l'avons fait voir suffisamment toutes les fois que des accords se meuvent conformément à des intervalles consonnants. Tou-

tefois, lorsque les mouvements des accords se font par degrés conjoints, c'est-à-dire des secondes : $\left(\frac{9}{8}\right)$, $\left(\frac{16}{15}\right)$ ou $\left(\frac{10}{9}\right)$, on doit considérer qu'il y a eu élision d'un état harmonique intermédiaire. Ainsi, dans la formation suivante :

f · *l* · *d*	
r · · *s* · *t*	mouvement $\left(\frac{8}{9}\right)$

C'est comme si l'on avait :

f · *l* · *d*	mouvement $\left(\frac{2}{3}\right)$
m · *s* · · *d*	mouvement $\left(\frac{3}{4}\right)$
r · · *s* · *t*	différence $\left(\frac{8}{9}\right)$

La station intermédiaire a été supprimée, élidée dans le premier mouvement. C'est que l'intervalle $\left(\frac{8}{9}\right)$ est la différence d'un mouvement de quinte et quarte. Le même fait se présente avec toutes les lyres qui ont servi à guider les mouvements conjoints. Le pivot qui conduit de la première station à la station intermédiaire fait partie du premier accord. Le pivot qui conduit de la station intermédiaire à la dernière se trouve sur ce dernier accord, de sorte que, dans le mouvement élidé sans la station intermédiaire, les deux pivots figurent parmi les sons du premier et du second accord. On peut donc dire que tous les mouvements des accords comportent des pivots. Les sons autres que les pivots peuvent se mouvoir en vertu des attractions qui représentent le plus souvent les cadences élidées, élidées partielles, ou les chutes élidées, les mouvements s'opèrent alors dans les parties correspondantes, par degrés conjoints ; ils peuvent encore se mouvoir comme s'ils s'étaient concentrés sur le pivot, ou comme s'ils en étaient ensuite sortis par dédoublements.

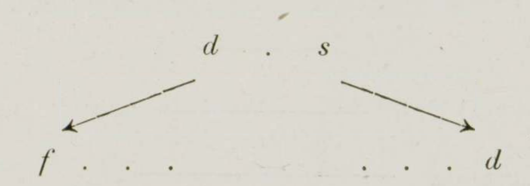
Ces explications font voir clairement que les diverses parties se déplacent par degrés conjoints ou bien suivant les intervalles qui résultent de la théorie des trois sons. On sait que les intervalles de la théorie des trois sons représentent toujours des intervalles primaires, on en conclut que les sons ne peuvent pas se déplacer, naturellement du moins, suivant des intervalles non primaires comme $\left(\frac{7}{5}\right)$ ou $\left(\frac{10}{7}\right)$ (quintes diminuées ou quartes augmentées)

et en général suivant des intervalles diminués ou augmentés. Toutefois, la périodicité fait que les mouvements peuvent se faire conformément à des intervalles dont le renversement serait un intervalle primaire, comme les sixtes par exemple, la sixte mineure surtout qui correspond à un intervalle original primaire.

Ces explications montrent encore que les parties ne peuvent se croiser que par le moyen des concentrations et des dédoublements. Ces croisements ne peuvent donc être que tout à fait exceptionnels.

Quant au mouvement des basses, lorsqu'ils ne se font pas par degrés conjoints ainsi qu'il a été expliqué, ils doivent se faire par des mouvements assez grands pour être définis par les empreintes réelles de cette basse, conformément à ce qui a résulté des § § 11 et 12 du chap. IX. Les mouvements des basses se font donc de préférence selon de grands intervalles, quand ils ne s'opèrent pas par degrés conjoints.

Enfin, il convient de signaler ce que nous avons fait remarquer dans le chapitre des cadences, à propos des incohérences, c'est-à-dire que les successions de quintes entre deux mêmes parties sont incohérentes, même si on les obtient par mouvements contraires :



La cadence porte sur la dominante du second intervalle.

Des remarques analogues sont à faire pour les quintes auxquelles on aboutirait par mouvement droit.

Les mouvements contraires sont les plus naturels. Ce sont ceux qui résultent de la théorie des trois sons. On a vu comment ils caractérisent la tonalité et les modes. Ce sont les plus élégants parce que les sons, effectuant leurs mouvements de part et d'autre du pivot, ne se gênent pas mutuellement pour caractériser les attractions.

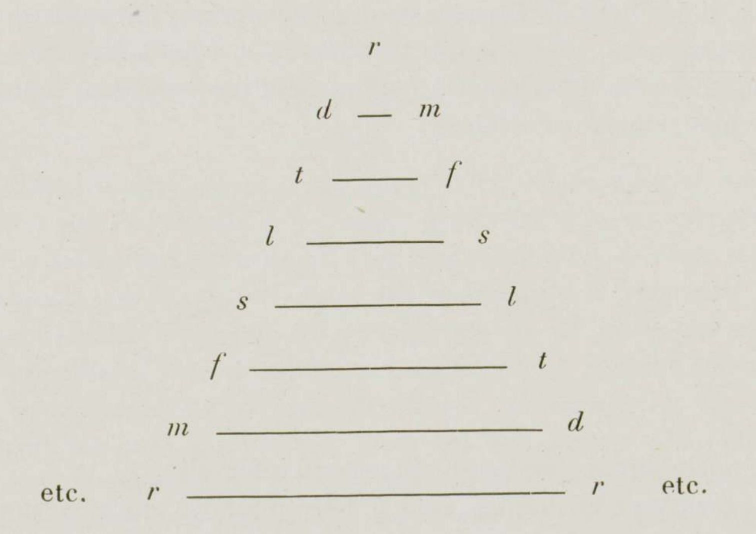
Dans ces mouvements contraires, on remarque combien l'état harmonique devient pauvre quand en partant d'un pivot, on aboutit en cadence sur deux sons à l'octave. Dans toutes les stations intermédiaires de la figure (**115**) par exemple, § 15, chap. VII, l'état harmonique est entièrement défini par le pivot et les deux sons mobiles. Quand on arrive à la cadence, l'état harmonique

devient incomplet. Cet état de pauvreté donne une sensation de vide qu'on doit éviter. Il en résulte, pour être appliquées à l'octave, des règles analogues à celles qui concernent les quintes, mais qui découlent d'un tout autre motif. Ce que nous disons de l'octave s'applique naturellement à l'unisson.

Ces quelques applications permettront facilement de lier aux règles de l'harmonie les développements que nous avons donnés à notre étude.

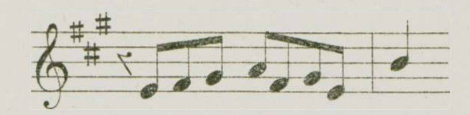
Avant de quitter ce sujet, nous devons signaler que notre travail permet de dégager un certain nombre de curiosités musicales résultant des propriétés des attractions réciproques, unilatérales ou bilatérales, ou de la symétrie des échelles, etc. En voici un exemple :

On sait que l'échelle diatonique est formée des sons conjugués relatifs au nombre 45. Les sons se correspondent ainsi, en y comprenant l'axe de liaison *r*.

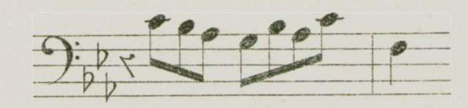


On vérifiera facilement que, dans un contrepoint à deux parties établi suivant les règles, on peut changer tous les sons de chacune des parties, en les remplaçant chacun par le son conjugué correspondant. Lorsqu'un son du contrepoint initial est altéré par ♯ ou ♭, le son conjugué correspondant du contrepoint modifié devra être altéré en sens inverse, c'est-à-dire par ♭ ou par ♯. Enfin si l'armature à la clef comporte un certain nombre d'accidents, comme trois dièzes, par exemple : $\underset{\sharp}{f}\ \underset{\sharp}{d}\ \underset{\sharp}{s}$, l'armature du contrepoint modifié devra comprendre trois ♭ : $\underset{\flat}{t}\ \underset{\flat}{m}\ \underset{\flat}{l}$ (on sait que les altérations par ♯ ou ♭ se correspondent suivant les sons conjugués). Pour se tenir dans le médium des voies, on

conservera comme son commun formant axe de la transformation, le *ré* naturel placé sous la portée de la clef de *sol*. Ainsi les quelques sons suivants :



deviendraient après la transformation :



Dans une opération de ce genre, qui doit être appliquée bien entendu aux deux parties suivant la même règle, ce qui était cadence devient évolution et réciproquement, les règles du contrepoint restent appliquées d'elles-mêmes. Si l'on désire d'ailleurs terminer en cadence, ce qui n'est pas nécessairement indispensable, il suffirait de légères retouches finales.

Il va sans dire que, moyennant des armatures convenables à la clef, on pourrait adopter d'autres transformations analogues issues d'un autre axe que le son *ré*.

CHAPITRE XV

Anharmonie

§ 1. — Comma mineur.

La première apparition du comma mineur remonte au § 8 du chap. VIII. Nous avons alors engendré l'échelle diatonique par des mouvements d'accords issus, les uns, d'un accord parfait majeur *d m s*, les autres d'un accord parfait mineur *l d m*. On a abouti, par ces deux voies différentes, à des sons identiques, sauf un, le son *r*, qui a été trouvé dans le premier cas à une hauteur un peu plus grande que dans le second. La différence entre les deux a été appelée comma mineur $i = \left(\frac{81}{80}\right)$.

Nous avons encore signalé le comma mineur *i*, à propos de l'adaptation, au chap. IX. Ce comma a apparu avec le circuit (**142**) et nous avons vu comment, malgré une erreur de *i*, la tierce majeure altérée passait toujours pour une tierce majeure réelle, grâce à la faculté *z*.

Ce même comma mineur s'est encore présenté à nous, sous son véritable jour, lorsque nous avons spécialement étudié l'échelle diatonique au chap. XI. Cette échelle a été envisagée comme formée des sons conjugués résultant du nombre 45.

d	a pour son conjugué		*m*
t	—	—	*f*
l	—	—	*s*
s	—	—	*l*
f	—	—	*t*
m	—	—	*d*

L'ensemble de ces sons possède deux axes de symétrie. Le premier est formé en quelque sorte par le son *r* qui occupe deux positions très voisines séparées du comma mineur *i*. Le son le plus élevé $\underset{+}{r}$ se lie à *s* et à *t* au moyen d'intervalles consonnants. Le son le moins élevé $\underset{-}{r}$ se lie à *l* et à *f* par les mêmes intervalles consonnants pris en sens inverse. Si donc, après avoir exprimé le son $\underset{+}{r}$ on se sert de cette expression pour obtenir *f* et *l*, ces deux sons se trouveront trop élevés de *i*. De la même manière, *t* et *s* eussent été abaissés de *i* en partant de $\underset{-}{r}$. Le son de liaison entraîne donc une sorte de décalage de un comma *i* soit vers le haut, soit vers le bas, suivant le cas. De plus, les sons *d* et *m*, bien que séparés de $\underset{+}{r}$ par les intervalles dissonnants $\left(\frac{9}{8}\right)$ et $\left(\frac{10}{9}\right)$ peuvent être décalés eux aussi de *i*, si ces deux sons viennent à être repérés à $\underset{-}{r}$. Mais ce qu'il y a d'important à remarquer, c'est que le son *m*, même décalé de un comma vers le haut, en conservant à *d* sa position primitive, apparaît comme formant avec ce *do* une tierce majeure réelle, malgré l'erreur du comma *i*. C'est ce qui résulte des explications qui ont accompagné la figure (**142**) au chap. IX. Cette erreur du comma *i*, qui peut en définitive se répercuter sur tous les sons de l'échelle, par le moyen du son de liaison, erreur qui est très appréciable en elle-même, disparaît dans l'appréciation des intervalles consonnants. Il se produit pour les sons de l'échelle comme un sillon moyen sur les empreintes desquels les sons se maintiennent, grâce à la mémoire des sons antérieurs. Le comma *i* n'altère donc pas à proprement parler les intervalles consonnants qui gardent ainsi entièrement leur signification, malgré l'erreur, grâce à la faculté *z*.

En définitive, le propre du comma mineur *i* est de ne pas dénaturer la signification des intervalles. Il n'est qu'un seul cas où cette différence puisse entrer en compte, c'est dans les mouvements d'accords comme nous l'avons signalé à la fin du § 7, chap. XIV, à propos des intervalles $\left(\frac{9}{8}\right)$ et $\left(\frac{10}{9}\right)$, dont la différence est précisément égale à *i*.

§ 2. — **Comma majeur.**

La première apparition du comma majeur remonte à la comparaison que nous avons faite de l'échelle diatonique et des échelles des cadences et des évolutions. Nous avons encore signalé le comma majeur à propos de l'adaptation ; il a apparu avec la figure (**144**) au § 6, chap. IX. Enfin, ce même comma s'est

présenté à nous quand nous avons voulu établir un rapport entre les sons *t* et *f* à la fin du § 1 du chap. XI, en commençant notre étude de l'échelle diatonique.

Comme il s'agit d'établir un rapport pouvant exister entre deux degrés de l'échelle, l'altération de *j*, bien que modifiant la position du son et sa signification dans ses relations avec les autres sons de l'échelle, n'en modifie pas le nom.

Ainsi qu'on vient de le voir, le comma *j* résulte de la recherche du rapport des deux sons *t* et *f*. Supposons, pour fixer les idées simplement, que nous adoptions pour sons réels, les sons du tempérament moyen. Admettons que l'on émette simultanément *t* et *f*, le premier étant à la basse. Si l'on ne joint aucun aucun autre son, l'intervalle ne peut se repérer que par le support réel qui est *s*. L'intervalle de *s* à *t* est une tierce majeure caractérisée, nous la posons naturellement sur les sons correspondants de l'échelle ; c'est donc le son *f* qui s'abaisse de *j* pour former l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$. C'est la position occupée par ce son sur l'échelle des cadences.

Si outre les sons *t* et *f* on émet en même temps *s*, il y a confirmation absolue de ce qui précède. Mais si au lieu d'émettre *s*, on émet un autre son indicateur *l*, à une tierce au-dessus de *f*. Ce son indicateur se placera avec le *f* sur l'échelle et c'est le *t* qui montera de *j* pour se placer comme sur l'échelle des évolutions.

Ainsi le comma majeur n'intervient en principe que pour donner, le cas échéant et moyennant des sons indicateurs convenables, une définition à l'intervalle ascendant de *t* à *f*. Cet abaissement de *j* du son *f* entraîne avec lui l'inflexion à $\left(\frac{7}{6}\right)$ de la tierce mineure de $\underset{+}{r}$ à *f*, dans le cas du son indicateur *s*, et cet exhaussement de *j* du son *t* entraîne avec lui l'inflexion à $\left(\frac{7}{6}\right)$ de la tierce mineure de $\underset{-}{r}$ à *t*, dans le cas du son indicateur *l*. Comme contre-partie, les tierces majeures de *f* à *l* ou de *s* à *t* s'infléchissent pour donner l'intervalle $\left(\frac{9}{7}\right)$ au lieu de $\left(\frac{5}{4}\right)$. On le voit, les sons se placent intégralement en conformité de ce qui est indiqué soit sur l'échelle des cadences, soit sur l'échelle des évolutions.

En définitive, en caractérisant l'intervalle de *t* à *f*, les sons indicateurs qui abaissent ou exhaussent certains sons du comma *j*, n'ont pas pour effet de changer le nom d'aucun des sons infléchis. Les intervalles correspondants prennent une signification spéciale, voilà tout.

Cette altération de *j* n'existe, comme nous le disons, que moyennant le son indicateur convenable. Ainsi, dans la disposition

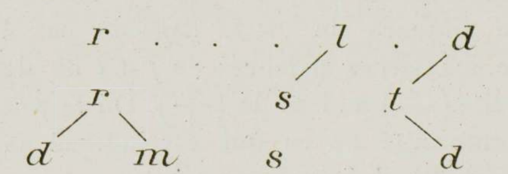
s . *t* . *r* . *f*

Le *f* est abaissé de *j* au-dessous de la position qu'il occupe sur l'échelle diatonique ; dans la disposition :

l . *d* . *f*

au contraire, le *f* prend la position indiquée sur l'échelle diatonique.

Les inflexions du comma *j* telles que nous venons de les examiner, sont celles qui correspondent à la tonalité. Elles caractérisent les accords de septième de dominante et de septième de sensible. Mais il est un certain nombre de cas où ces altérations peuvent porter accidentellement sur d'autres sons que *t* ou *f*. L'échelle diatonique comporte quatre tierces mineures : *l d*, *m s*, *t r*, *r f*. Ces tierces mineures peuvent être infléchies à la valeur $\left(\frac{7}{6}\right)$, en prenant des sons indicateurs soit à une quinte au-dessous du son le plus grave de chaque tierce, soit à une quinte au-dessus du son le plus élevé de chaque tierce. Prenons le premier cas à titre d'exemple, nous obtiendrons les quatre assemblages de sons suivants : *r*. *l d* ; *l*. *m s* ; *m*. *t r* ; *s*. *r f*. La dernière combinaison est celle qui correspond à l'accord de septième de dominante de la tonalité, nous n'insistons pas. Les trois premières forment des fragments caractéristiques d'accords de septième de dominante qui feraient cadences sur *s*, *r* et *l*. C'est si l'on veut un moyen de moduler analogue à d'autres que nous avons cités au chapitre précédent. S'il s'agit de simples transitions, comme celle-ci par exemple :



L'inflexion de *j* du son *d* est absolument passagère et accidentelle, c'est comme si l'on était passé transitoirement dans la tonalité de *s*, tonalité dans laquelle le son *d* occupe la position *f* dans la tonalité de *do*.

Quoiqu'il en soit, en toutes circonstances et quelle qu'en soit l'origine, les inflexions des sons au moyen du comma majeur, bien que changeant la signification des intervalles au moyen des sons indicateurs, n'en modifient pas la désignation. Le son *f* infléchi reste un *fa*, on ne reconnaît l'inflexion que par l'examen des sons indicateurs qui l'accompagnent. Le comma majeur

caractérise toujours soit une quinte diminuée $\left(\frac{7}{5}\right)$, soit une quarte augmentée $\left(\frac{10}{7}\right)$, il caractérise encore l'intervalle $\left(\frac{7}{4}\right)$, ou la tierce mineure $\left(\frac{7}{6}\right)$.

On voit la différence capitale entre le comma mineur et le comma majeur. Le premier est une erreur inévitable et nécessaire qui résulte de l'accommodement des nombres trois et cinq, elle s'applique éventuellement à tous les sons de l'échelle, elle ne dénature pas les intervalles et on ne peut en aucun cas faire état de cette petite erreur, sauf une seule exception que nous avons signalée. Le comma majeur résulte de l'accommodement accidentel du nombre sept avec les nombres trois et cinq, cette circonstance ne se présente que dans des cas déterminés ; certains intervalles prennent ainsi des significations différentes de celles qu'ils ont sur l'échelle diatonique ; on reconnaît cela par les sons indicateurs. Les inflexions ordinaires de j, dans une tonalité donnée, sont celles qui résultent des échelles des cadences ou des évolutions ; mais il peut y en avoir accidentellement d'autres, soit pour moduler, soit pour certaines transitions d'accords.

§ 3. — **Comma anharmonique.**

Tandis que les commas majeurs et mineurs constituaient des infléchissements d'un même son, gardant son nom et son écriture, le comma anharmonique au contraire constitue un intervalle petit qui, bien que moindre que la tolérance $i + j$, ne peut porter entre deux sons de même nom. Ces sons ne doivent pas être confondus parce que cette confusion entraînerait comme conséquence ce que nous avons appelé l'incompatibilité.

La première incompatibilité qu'il nous a été donné de signaler est celle qui résulte de la comparaison de l'intervalle de tierce majeure à la période d'octave. Cette incompatibilité est indiquée par la figure (**169**) § 6 chap. XI. L'intervalle $K = \left(\frac{128}{125}\right)$ entre $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$ ne peut pas permettre la confusion des deux sons ; tout cela a été développé au § 7 du même chapitre. On a trouvé la relation :

$$3\,T = \omega - K$$

Le $\underset{\sharp}{s}$ est lié à m par une tierce majeure ascendante. Le $\underset{\flat}{l}$ est lié à *do* par une tierce majeure descendante. Les sons indicateurs qui accompagnent ces

deux sons $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$, si rapprochés qu'ils soient, empêcheront toujours qu'ils puissent être confondus. Ainsi $f\ \underset{\flat}{l}\ d$ constituera un accord parfait mineur dans lequel de f à $\underset{\flat}{l}$ il y a une tierce mineure et de $\underset{\flat}{l}$ à d une tierce majeure. Ce son $\underset{\flat}{l}$ ne pourra donc pas se confondre avec $\underset{\sharp}{s}$. Il en serait de même avec l'accord $m\ \underset{\sharp}{s}\ t$, dans lequel $\underset{\sharp}{s}$ est caractérisé par les tierces et ne peut pas se confondre avec $\underset{\flat}{l}$.

Au lieu de comparer l'intervalle original $\left(\frac{5}{4}\right)$ à l'octave $\left(\frac{2}{1}\right)$ on aurait pu partir de l'intervalle original $\left(\frac{3}{2}\right)$ et chercher la commune mesure avec l'octave $\left(\frac{2}{1}\right)$. Pour obtenir cette commune mesure, on opère comme dans la recherche du plus grand commun diviseur. La quinte est contenue une fois dans l'octave ; il reste un intervalle de quarte $\left(\frac{4}{3}\right)$. On est amené à chercher la commune mesure entre $\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{4}{3}\right)$. La quarte est contenue une fois dans la quinte ; il reste l'intervalle du ton majeur. Or, on remarque que cet intervalle est à peu près contenu six fois dans l'octave. On sait en effet qu'une tierce majeure vaut deux tons majeur moins un comma mineur i.

$$T = 2\,S - i$$

Remplaçons cette expression dans celle qui unit la tierce majeure à l'octave, on trouvera :

$$6\,S = \omega + 3\,i - K$$

Si l'on porte six tons consécutifs, à partir de *do*, on aura la série des intervalles

$$d\ \ r\ \ m\ \ \underset{\sharp}{f}\ \ \underset{\sharp}{s}\ \ \underset{\sharp}{l}\ \ \underset{\sharp}{t}$$

Cette succession donne bien l'impression d'incompatibilité.

On voit que l'on n'aboutit pas au son d, à l'octave au-dessus de l'origine, mais à un son $\underset{\sharp}{t}$ qui diffère de *do* de $3\,i - K$. Le son $\underset{\sharp}{t}$ ainsi obtenu est plus élevé que *do* de $3\,i - K$, c'est-à-dire d'à peu près $\frac{4}{3}$ de comma mineur. C'est encore un comma anharmonique. On voit qu'il est formé du premier K combiné avec le comma i qu'on doit négliger, comme on l'a vu au § 1 ci-dessus. Ces deux commas se réduisent donc à la même définition générale.

On peut présenter les conclusions qui précèdent sous une forme un peu différente. Formons, à partir de *f* une série de douze quintes :

$$\begin{matrix} f & d & s & r & l & m & t & f & d & s & r & l & m \\ & & & & & & & \sharp & \sharp & \sharp & \sharp & \sharp & \sharp \end{matrix}$$

nous aboutissons à $\underset{\sharp}{m}$ pour former à peu près sept octaves, conformément à l'équation (**178**), § 11, chap. XI. La différence est :

$$12\ Q - 7\ \omega = 3\ i - K$$

c'est-à-dire le même comma trouvé ci-dessus. On obtiendrait la même différence avec les quintes descendantes :

$$\begin{matrix} d & s & r & l & m & t & f & d & s & r & l & m & l \\ \flat & \flat & \flat & \flat & \flat & \flat & & & & & & & \end{matrix}$$

La valeur de ce comma est $\left(\frac{531441}{524288}\right)$ à peu près égale avons-nous dit à $\frac{4}{3}$ de comma mineur.

Nous n'avons fait entrer dans les considérations qui précèdent que les nombres 3 et 5, nous demeurons en concordance avec l'échelle diatonique, c'est-à-dire que les commas anharmoniques obtenus sont formés du même intervalle *K*, avec ou sans des commas mineurs.

§ 4. — Inflexions du comma anharmonique.

Les inflexions harmoniques résultent toujours de l'intervention accidentelle du facteur 7. L'empreinte 7 est signalée par l'intervalle de *t* à *f*. C'est avec cet intervalle qu'il faut chercher ce que peut être l'inflexion du comma anharmonique.

Sur l'échelle normale les intervalles de *t* à *f* et de *f* à *t* en montant sont formés de la manière suivante et conformément aux figures (**274**) et (**275**).

La première figure montre que la quinte diminuée, de t à f, est formée de deux tierces mineures moins un comma i. La seconde figure montre que la

(274) $t \quad . \quad \overset{-}{r} \overset{\succ i \prec}{\ } \overset{+}{r} \quad . \quad f$; $\left(\frac{6}{5}\right)$; $\left(\frac{6}{5}\right)$; $2\ T^1 - i$

$f \quad s \quad . \quad t$; $\left(\frac{9}{8}\right)$; $\left(\frac{5}{4}\right)$; $T + S$ (275)

quarte augmentée de f à t est égale à une tierce majeure plus un ton majeur. La différence entre la quinte diminuée et la quarte augmentée est donc :

$$2\ T^1 - i - T - S = (T^1 - S) - (T - T^1) - i = \left(\frac{16}{15}\right) - \left(\frac{25}{24}\right) - i = K - i$$

On sait en effet que :

$$T^1 - S = \left(\frac{6}{5}\right) - \left(\frac{9}{8}\right) = \left(\frac{16}{15}\right)$$

$$T - T^1 = \left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{25}{24}\right) \text{ et } \left(\frac{16}{15}\right) - \left(\frac{25}{24}\right) = \left(\frac{128}{125}\right) = K$$

L'incompatibilité est donc encore signalée par le comma anharmonique K.

Si nous infléchissons les intervalles par diminution de j pour la quinte diminuée et par augmentation de j pour la quarte augmentée ; la différence devient $\left(\frac{7}{5}\right) - \left(\frac{10}{7}\right) = -\left(\frac{50}{49}\right)$. On voit qu'elle change de signe. Comment cette différence peut-elle se ramener au comma anharmonique ? Remarquons que l'intervalle $\left(\frac{7}{5}\right)$ est égal à la quinte diminuée de la figure (**274**) diminuée de j. On a donc :

$$2\ T^1 - i = \left(\frac{7}{5}\right) + j$$

On a de même :

$$T + S = \left(\frac{10}{7}\right) - j$$

On sait que la différence de ces deux intervalles est égale à $K - i$, comme nous l'avons vu il y a un instant, on a donc :

$$K - i = -\left(\frac{50}{49}\right) + 2\,j$$

Par conséquent la différence des intervalles infléchis est la suivante :

$$\left(\frac{50}{49}\right) = 2\,j + i - K$$

On voit que l'inflexion est marquée par l'introduction du comma majeur dans cette expression. Le caractère anharmonique de l'intervalle est toujours indiqué par la présence du comma anharmonique K.

Cela est général. Considérons un intervalle anharmonique quelconque, la seconde augmentée par exemple de *f* à $\overset{s}{\sharp}$ dans le mode mineur. Sa valeur est égale à un ton plus l'intervalle chromatique. L'intervalle harmonique le plus voisin est la tierce mineure qui vaut un ton plus un demi-ton diatonique, la différence est donc égale à celle des demi-tons diatoniques et chromatiques, c'est-à-dire à K.

Infléchissons le *fa* du même intervalle en l'abaissant de j, conformément à ce qui se passe pour l'accord de septième de sensible mineur, cette inflexion ne fera qu'introduire dans la différence le comma majeur j ; la différence sera $K - j = \left(\frac{128}{125}\right) - \left(\frac{64}{63}\right) = \left(\frac{126}{125}\right)$.

§ 5. — Formation générale des intervalles anharmoniques.

Les intervalles anharmoniques naissent tout naturellement de la comparaison des sons qui composent la tonalité, comprise avec sa signification la plus générale, comme sur la figure (**273**) du chapitre précédent. Nous reproduisons cette figure en (**276**) et nous marquons par des traits limités aux sons correspondants, les divers intervalles anharmoniques tels qu'ils apparaissent.

Le plus important des intervalles anharmoniques est formé par la comparaison de la quinte diminuée à la quarte augmentée. Cette importance tient à ce fait que, par inflexion harmonique, ils forment les intervalles complets $\left(\frac{7}{5}\right)$ et $\left(\frac{10}{7}\right)$.

d		*r*		*m*	*f*		*s*		*l*♭	*l*		*t*	*d*					— Echelle diatonique majeure.
				m	*f*		*s*	*s*♯		*l*		*t*	*d*		*r*		*m*	— Echelle diatonique mineure.
d		*r*		*m*	*f*		*s*			*l*	*t*♭	*t*	*d*					— Echelle des cadences.
				m	*f*	*f*♯	*s*			*l*		*t*	*d*		*r*		*m*	— Echelle des évolutions.
d		*r*	*m*♭		*f*		*s*			*l*		*t*	*d*					Modes secondaires.
				m	*f*		*s*			*l*		*t*		*d*♯	*r*		*m*	
d	*d*♯	*r*	*m*♭	*m*	*f*	*f*♯	*s*	*s*♯	*l*♭	*l*	*t*♭	*t*	*d*	*d*♯	*r*	*m*♭	*m*	

(276)

§ 6. — Changements anharmoniques rationnels et changements artificiels.

Lorsqu'on envisage deux intervalles dont l'un est une inflexion anharmonique de l'autre, il y a toujours au moins un des deux intervalles qui est complet. L'autre est presque toujours incomplet. Il n'y a d'exception que pour la quinte diminuée $\left(\frac{7}{5}\right)$ qui a pour inflexion anharmonique la quarte augmentée $\left(\frac{10}{7}\right)$; dans ce cas particulier, les deux intervalles sont complets ; c'est le seul.

Considérons le cas le plus général, et prenons comme exemple la seconde augmentée. Elle a pour valeur $\left(\frac{9}{8}\right) + \left(\frac{25}{24}\right) = \left(\frac{75}{64}\right)$ qui est un intervalle incomplet. Son infléchissement harmonique est $\left(\frac{8}{7}\right) + \left(\frac{25}{24}\right) = \left(\frac{25}{21}\right)$, c'est encore un intervalle incomplet. Quant à son infléchissement anharmonique il est représenté par la tierce mineure, soit $\left(\frac{6}{5}\right)$, soit son infléchissement harmonique $\left(\frac{7}{6}\right)$. Nous allons montrer qu'on peut toujours passer de l'intervalle incomplet à l'intervalle complet au moyen d'une attraction.

Considérons en effet l'intervalle $\left(\frac{75}{64}\right)$ et cherchons à passer à $\left(\frac{6}{5}\right)$. Le quotient $\frac{5\times75}{64}$ est bien 6 à une demi-unité près. On passerait de même à $\left(\frac{7}{6}\right)$ car le quotient $\frac{6\times75}{64}$ à une demi-unité près est bien 7. On passerait de même de $\left(\frac{25}{21}\right)$ à l'un quelconque des intervalles $\left(\frac{6}{5}\right)$ ou $\left(\frac{7}{6}\right)$ en vertu d'une attraction. On voit du reste qu'il s'agit bien d'attractions réelles, puisque les empreintes qui s'attirent sont celles qui viennent en contact et que l'on sait que ces empreintes figurent parmi les empreintes distinctes, l'intervalle final étant complet.

Ces modifications correspondent par exemple à ceci :

$$f \quad \cdot \quad \underset{\#}{s}$$
$$f \quad \quad \underset{\flat}{l}$$

Le son $\underset{\#}{s}$ passe à $\underset{\flat}{l}$ en vertu d'une attraction réelle, on dit que c'est un changement anharmonique rationnel.

Le passage inverse du second intervalle à l'intervalle incomplet ne peut se faire en vertu d'une attraction, puisque l'on doit aboutir soit à des coïncidences d'empreintes additionnelles, soit même à des coïncidences purement fictives servant à énoncer l'intervalle, mais qui ne correspondent à aucune empreinte. On dit que c'est un changement anharmonique artificiel.

Nous avons signalé que, exceptionnellement, la quarte augmentée et la quinte diminuée étaient des intervalles complets tous les deux. Cet intervalle est donc celui qui se prête le mieux aux changements anharmoniques rationnels.

Dans ces changements anharmoniques, le mouvement du son se fait suivant le comma anharmonique K augmenté ou diminué de commas majeurs o umineurs. Ce mouvement est faible ; sur le tempérament il est nul et n'est marqué que par les sons indicateurs. Le son réel n'a pas bougé, seul le son repéré a subi l'altération.

§ 7. — **Modulations anharmoniques.**

Les modulations anharmoniques sont celles qui utilisent les changements anharmoniques définis au § précédent. Ces modulations peuvent donc avoir le caractère rationnel ou simplement artificiel.

Nous allons donner, au moyen d'un exemple, une idée de ce que peut être une modulation anharmonique rationnelle. Considérons, sur la première ligne de la figure (**277**), l'accord de septième de sensible $t\ r\ f\ l$, et portons notre attention sur la quinte diminuée de t à f, qui est bien caractérisée par les sons indicateurs r et l. Adoptons le son t pour pivot, on peut, par attraction anharmonique, passer de la quinte diminuée de t à f à la quarte augmentée de t à $\underset{\#}{m}$. Cette quarte est caractérisée par les sons indicateurs $\underset{\#}{d}$ à $\left(\frac{8}{7}\right)$ au-dessus de t et $\underset{\#}{s}$ à une quinte au-dessus de $\underset{\#}{d}$. Ces sons $\underset{\#}{d}$ et $\underset{\#}{s}$ sont substitués aux sons r et l, en vertu d'attractions. Comme le second accord prend la forme d'un accord de septième de dominante, on fait cadence sur l'accord de $\underset{\#}{f}$ dans la tonalité duquel on peut ainsi aboutir.

(**277**)

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & t & . & r & . & f & . & l \\
 & & \swarrow & & & \downarrow & & \swarrow \\
 & t & \underset{\#}{d} & & & \underset{\#}{m} & & \underset{\#}{s} \\
\swarrow & & & & & \searrow & \swarrow & \\
l & & \underset{\#}{d} & & & \underset{\#}{f} & &
\end{array}
$$

On aurait pu prendre *f* pour pivot et obtenir

(278)

$$
\begin{array}{l}
t \quad r \quad f \quad l \\
\underset{\flat}{d} \quad \underset{\flat}{r} \quad f \quad l \\
\underset{\flat}{t} \quad \underset{\flat}{r} \quad \underset{\flat}{l}
\end{array}
$$

qui marque la tonalité $\underset{\flat}{s}$. On voit que, par l'anharmonie on peut atteindre directement des tonalités très éloignées de celles d'où l'on est parti.

Les modulations anharmoniques artificielles servent souvent à simplifier la notation, en diminuant le nombre des notes altérées. C'est ainsi que, si l'on est conduit par exemple à la tonalité $\underset{\sharp}{t}$, on lui substituera tout d'un coup la tonalité *d*, qui n'a plus d'armature à la clef.

§ 8. — Grandeur comparée des demi-tons diatoniques et chromatiques.

Des discussions se sont élevées sur le point de savoir lequel des deux demi-tons diatonique ou chromatique était le plus grand. On ne s'est pas entendu parce qu'on n'a pas parlé le même langage.

Les demi-tons normaux ont pour valeur $\left(\frac{16}{15}\right)$ pour le demi-ton diatonique, et $\left(\frac{25}{24}\right)$ pour le demi-ton chromatique. Nous disons tout d'abord que nous ne parlons pas des intervalles des sons réels, mais seulement des intervalles tels qu'ils sont repérés dans un cas comme dans l'autre, par les empreintes qui sont approximativement en présence. Les intervalles repérés prennent bien ces valeurs, même sur le tempérament, où les sons réels donnent l'égalité des deux demi-tons.

Mais les demi-tons ne possèdent pas rien que leur valeur normale, il arrive qu'ils peuvent être infléchis ; dans ces cas, les intervalles repérés subissent des inflexions qui en altèrent la grandeur relative.

Considérons par exemple le demi-ton diatonique, qui résulte de la différence d'une tierce majeure et d'une quarte.

$$\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{16}{15}\right)$$

Remplaçons la quarte par la quarte infléchie $\left(\frac{21}{16}\right)$, la différence devient :

$$\left(\frac{21}{16}\right) - \left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{21}{20}\right)$$

Remplaçons la tierce $\left(\frac{5}{4}\right)$ par son infléchissement $\left(\frac{9}{7}\right)$, on obtient :

$$\left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{9}{7}\right) = \left(\frac{28}{27}\right)$$

Remplaçons enfin les deux intervalles chacun par leur infléchissement, on trouve :

$$\left(\frac{21}{16}\right) - \left(\frac{9}{7}\right) = \left(\frac{49}{48}\right)$$

Ainsi, d'infléchissement en infléchissement, le demi-ton diatonique repéré peut prendre les quatre valeurs décroissantes $\left(\frac{16}{15}\right)$, $\left(\frac{21}{20}\right)$, $\left(\frac{28}{27}\right)$ et $\left(\frac{49}{48}\right)$. Cette dernière est même inférieure à la tolérance, mais les sons qui forment l'intervalle ne peuvent pas être confondus réellement, car une quarte ne peut être confondue avec une tierce. C'est pour éviter de pareilles confusions que le tempérament moyen est indispensable, pour guider la marche des sons en général, ainsi que nous l'avons déjà indiqué.

Considérons de même le demi-ton chromatique, différence entre les tierces majeures et mineures :

$$\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{25}{24}\right)$$

Remplaçons successivement les tierces par leurs infléchissements, on trouvera :

$$\left(\frac{9}{7}\right) - \left(\frac{6}{5}\right) = \left(\frac{15}{14}\right)$$

$$\left(\frac{5}{4}\right) - \left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{15}{14}\right)$$

$$\left(\frac{9}{7}\right) - \left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{54}{49}\right)$$

Le demi-ton chromatique peut donc prendre la série des valeurs repérées suivantes $\left(\frac{25}{24}\right)$, $\left(\frac{15}{14}\right)$ et $\left(\frac{54}{49}\right)$ qui vont en croissant.

La valeur relative des demi-tons chromatiques et diatoniques dépend donc uniquement des circonstances dans lesquelles ces intervalles sont amenés. Les infléchissements diminuent toujours le demi-ton diatonique repéré, et augmentent toujours le demi-ton chromatique repéré.

Quant aux sons réels, ils peuvent accuser des intervalles différents des sons repérés. Des chanteurs qui auront à articuler les successions suivantes :

(279) $d \rightarrow \underset{\sharp}{s} \rightarrow l$

(280) $d \rightarrow \underset{\flat}{l} \rightarrow s$

(281) $\underset{\flat}{m} \rightarrow d \rightarrow \underset{\flat}{l}$

placeront le $\underset{\sharp}{s}$ tout près du *l*, dans (279) ; le $\underset{\flat}{l}$ tout près du *s*, dans (280) ; le $\underset{\flat}{l}$ à sa position repérée, dans (281). Ces sons $\underset{\sharp}{s}$ et $\underset{\flat}{l}$ subissent alors des inflexions pour accuser leur tendance, mais l'accord qui accompagne un pareil mouvement, malgré ces inflexions des sons réels repère les sons aux places théoriques. On peut voir du reste que M. Massenet comprend ainsi les choses puisque à la neuvième mesure de la méditation de *Thaïs*, les sons se présentent en progression ascendante, à la basse, avec $\underset{\sharp}{d}$ $\underset{\flat}{r}$ et $\underset{\natural}{r}$. Le $\underset{\flat}{r}$ est donc bien au-dessus du $\underset{\sharp}{d}$. Il est des cas où ce serait le contraire, exemple :

$\underset{\flat}{m}$	s	$\underset{\flat}{t}$	$\underset{\flat}{r}$	d'une part	(Ton de $\underset{\flat}{l}$)
$\underset{\sharp}{d}$	m	s	t	d'autre part	(Ton de *r*)

correspondent à un $\underset{\flat}{r}$ plus grave que le $\underset{\sharp}{d}$

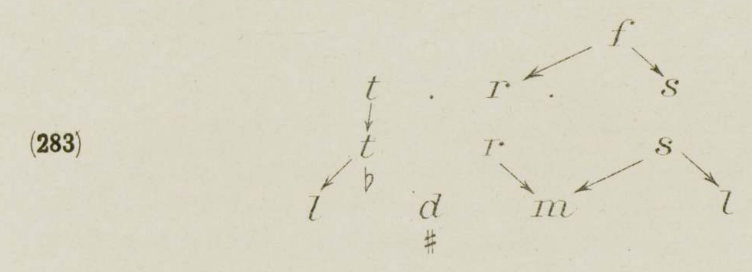
Revenons sur l'inflexion extrême du demi-ton diatonique, pour montrer dans quel cas elle peut se présenter. Partons d'un son *f* conformément au schéma (**45**) $A\ I\ p = 3$, et concentrons les sons obtenus conformément au schéma (**48**) $A\ I\ p = 3$, on obtient la figure (**282**).

(**282**)



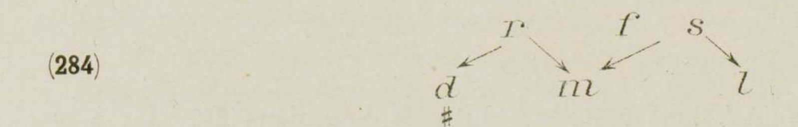
Les deux sons *m* et *f* sont séparés par l'intervalle diatonique infléchi $\left(\frac{49}{48}\right)$. Ce mouvement peut se traduire par les accords suivants :

(**283**)



ou simplement :

(**284**)



APPENDICE

A. – Remarque sur les sons composés.

Dans tout notre travail, nous avons supposé que les sons émis étaient simples, afin de dégager les lois de la musique, telles qu'elles résultent du phénomène principal de perception, en faisant abstraction des faits secondaires. Cependant, les sons simples n'existent pour ainsi dire pas en musique ; ils sont toujours accompagnés d'harmoniques qui suivent, à l'extérieur de l'oreille, une progression inverse de celle des sons implicites, à l'intérieur. Il en résulte que, quand un son fait avec son pivot un intervalle $\left(\frac{p}{q}\right)$, il y a non seulement coïncidence, à l'intérieur, du son implicite p du son, sur le son implicite q du pivot, mais encore coïncidence, à l'extérieur, du son harmonique q du son, sur le son harmonique p du pivot.

Les conséquences de cette seconde coïncidence sont extrêmement importantes. Nous ne les avons pas abordées, parce qu'elles se rapportent aux faits qu'on trouve développés dans les ouvrages de physique, et qu'elles n'ont que des rapports indirects avec ce que notre travail présente d'original.

La différence capitale entre les sons harmoniques et les sons implicites consiste dans ce fait que les premiers concernent uniquement le phénomène de la perception intérieure de l'oreille, alors que les seconds s'appliquent à des faits extérieurs.

Si les sons implicites provoquent les attractions, comme nous l'avons expliqué, les sons harmoniques extérieurs ne sauraient le faire de la même manière ; cependant, on constate bien vite que toute attraction, qui résulte des sons implicites, provoque en même temps le rapprochement et la coïncidence de deux sons harmoniques correspondants. Cela complète assurément le sentiment de satisfaction qui résulte du mouvement d'attraction accomplie.

Lorsqu'on arrive aux accords parfaits, la progression des sons harmoniques extérieurs concorde avec les sons réels de l'accord, s'il est majeur ; les

sons implicites intérieurs suivent un ordre inverse et symétrique. Il en est autrement avec les accords mineurs, dont les sons réels suivent l'ordre des sons implicites intérieurs, tandis que les sons harmoniques se présentent en sens inverse. Ces faits contribuent accentuer les différences et les caractères des deux systèmes d'accords parfaits, différences sur lesquelles nous avons tant insisté. En définitive, un son donné se trouve être le support réel de ses sons harmoniques, et le support virtuel de ses sons implicites.

A l'égard de la consonnance, ou de l'approximation des intervalles, les faits qui ressortent de la comparaison des sons implicites presque communs aux deux sons, ou des sons harmoniques très voisins et symétriques, donnent lieu à des résultats absolument différents. Deux sons implicites très voisins se posent sur des cordes de l'oreille très voisines, et entraînent les confusions que nous avons signalées. Ce sont là des phénomènes d'ordre intérieur, qui ne résultent que des mouvements des cordes mêmes de l'oreille. Il en est tout autrement à l'égard des sons harmoniques, parce que ces sons sont réels et extérieurs. Lorsque, par exemple, deux sons ne forment entre eux qu'un intervalle simplement approché, les sons harmoniques, qui devraient coïncider avec l'intervalle rigoureux, ne se superposent pas exactement. Le mélange de ces vibrations, dans l'air, provoque à l'extérieur de l'oreille des phénomènes complexes, tels que les battements. Souvent l'oreille devient incapable de séparer ces manifestations extérieures qui se sont transformées avant de lui parvenir. Cela accentue naturellement les phénomènes de dissonnance tels que nous les avons définis. Il se produit alors pour nous, à l'égard des sons, quelque chose d'analogue à ce qui se passe pour les couleurs dans notre œil qui, comme on le sait, ne peut pas séparer les mélanges de vibrations. C'est une des raisons pour lesquelles les harmoniques constituent en quelque sorte la couleur du son désignée sous le nom de timbre.

Ce simple aperçu montre enfin que la théorie des mouvements mélodiques des sons repose essentiellement sur les sons implicites ; de là, l'importance de la basse, qui donne à la musique son fondement et sa profondeur. Les harmoniques jouent un rôle tout différent ; ils contribuent à donner aux sons presque toute leur beauté, et la plus grande part de leur valeur artistique.

Il serait assurément très intéressant de développer toutes ces considérations, avec leurs conséquences ; mais cela comporterait de longs développements, et sortirait du cadre que nous nous sommes tracé, sans aboutir à d'autres conclusions que celles qu'on peut tirer, soit de notre travail simplifié, soit des faits connus en physique. Chacun pourra d'ailleurs y suppléer facilement.

B. — Généralisation des calculs relatifs aux attractions, à la consonnance ou aux inflexions des intervalles.

Ce travail est la reproduction de notes écrites, il y a assez longtemps, pour mes enfants. J'ai tenu à lui conserver sa forme élémentaire, qui suffit à résoudre convenablement les problèmes posés. On aurait pu suivre, dans quelques cas, des voies différentes et plus générales. Je vais en donner un exemple :

1. — Comparaison de deux nombres p et q, premiers entre eux.

Soit à considérer deux nombres entiers p et q, premiers entre eux. Portons sur une première ligne horizontale, figure (1), à partir d'une certaine origine O, vers la gauche, des longueurs égales à q, $2q$, $3q$, etc. (La figure suppose $q = 7$). Portons de même, sur une seconde ligne, à partir de la même origine O, des longueurs égales à p, $2p$, $3p$, etc. (La figure suppose $p = 10$). Les points de divisions obtenus ne se correspondent pas, en général ; la première coïncidence ne se produit qu'à la distance $p\,q$ de l'origine, correspondant au plus petit multiple commun à p et q. On voit que nous avons formé ainsi le compartiment de l'intervalle $\frac{p}{q}$.

Les problèmes qui se sont posés lorsqu'on a étudié les attractions, la consonnance, les inflexions, consistaient toujours dans la recherche des positions relatives des traits de chacune des deux lignes de la figure (1), les traits de la première étant considérés comme des empreintes, et ceux de la seconde, comme des fenêtres.

(1)

$10q$ $9q$ $8q$ $7q$ $6q$ $5q$ $4q$ $3q$ $2q$ $1 \times q$ 0

$7p$ $6p$ $5p$ $4p$ $3p$ $2p$ $1 \times p$ 0

On a envisagé par exemple la fenêtre d'ordre Q, qui, dans la figure (1), est à une distance $Q\,p$ de l'origine, et on a cherché le numéro d'ordre de l'empreinte la plus voisine ; on a été amené ainsi à prendre le quotient, à une demi unité près, par excès ou par défaut, de $Q\,p$ par q, quotient qu'on a appelé P.

Il est à remarquer que, lorsqu'on envisage successivement toutes les fenêtres du premier compartiment, c'est-à-dire lorsqu'on attribue à Q toutes les valeurs entières inférieures à q, les restes des divisions successives, $Q\,p : q$, sont tous différents et se partagent en deux groupes qui se correspondent deux à deux et sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires (lemme du théorème de Fermat). Cela signifie que les fenêtres successives sont séparées de l'empreinte la plus voisine par des distances marquées au moyen de tous les nombres égaux ou inférieurs à $\frac{q}{2}$. Enfin, on a remarqué que les empreintes et que les fenêtres se présentent avec symétrie rapportée au milieu du compartiment.

Tel est le bagage simple et unique qui nous a servi à résoudre toutes les questions, et qui est en réalité suffisant. Nous allons donner, très rapidement, une idée succincte de la voie à suivre, pour généraliser.

§ 2. — **Fractions continues.**

Considérons toujours les deux nombres p et q, premiers entre eux. Pour les comparer, effectuons le quotient de p par q, nous aurons un quotient m_1 et un reste r_1, on écrira alors :

$$\frac{p}{q} = m_1 + \frac{r_1}{q} = m_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}$$

Le quotient de q par r_1 donnera de même :

$$\frac{q}{r_1} = m_2 + \frac{r_2}{r_1} = m_2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

Le quotient de r_1 par r_2 donnera aussi :

$$\frac{r_1}{r_2} = m_3 + \frac{r_3}{r_2} = m_3 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_3}} \quad \text{et ainsi de suite}$$

On peut donc écrire successivement :

$$\frac{p}{q} = m_1 + \frac{r_1}{q}$$

$$\frac{p}{q} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{r_2}{r_1}}$$

$$\frac{p}{q} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}}$$

et, en général :

$$(2) \qquad \frac{p}{q} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cfrac{1}{m_4 + \cdots \cdots + \cfrac{1}{m_n + \cfrac{r_n}{r_{n-1}}}}}}$$

On remarque que les opérations effectuées sont celles qui aboutissent au plus grand commun diviseur. Comme p et q sont premiers entre eux, le dernier reste est l'unité, et on a, en dernière analyse, pour la fraction $\frac{p}{q}$, une expression de la forme :

$$(3) \qquad \frac{p}{q} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cfrac{1}{m_4 + \cdots \cdots + \cfrac{1}{m_{K-1} + \cfrac{1}{m_K}}}}}$$

C'est ce que l'on nomme une fraction continue.

§ 3. — **Réduites, fractions complémentaires.**

Considérons l'expression $\frac{p}{q}$ donnée par l'égalité (**2**), et supprimons la dernière fraction $\frac{r_n}{r_{n-1}}$, on obtiendra une fraction continue de même forme que l'expression (**3**), mais réduite, savoir :

$$(4) \qquad \frac{p_n}{q_n} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cfrac{1}{m_4 + \cdots}}} \cdots + \cfrac{1}{m_{n-1} + \cfrac{1}{m_n}}$$

C'est ce qu'on nomme la réduite d'ordre n de la fraction (**3**). Quant à la fraction supprimée $\frac{r_n}{r_{n-1}}$, on la désigne sous le nom de fraction complémentaire. On voit que les termes de la fraction complémentaire vont en diminuant à mesure que le numéro d'ordre augmente, tandis que les termes p_n et q_n de la réduite vont au contraire en augmentant.

Nous allons montrer que les termes p_n et q_n de la réduite d'ordre n se déduisent de ceux des deux réduites précédentes, au moyen des formules suivantes :

$$(5) \qquad p_n = m_n \; p_{n-1} + p_{n-2} \qquad\qquad q_n = m_n \; q_{n-1} + q_{n-2}$$

Pour le faire voir, envisageons l'expression (**4**), et admettons que les valeurs des lettres m_1, m_2, m_3, etc., soient toutes déterminées, sauf la dernière m_n. Un simple aperçu permet de constater que p_n et q_n peuvent se ramener, toutes réductions faites, à des expressions entières et du premier degré en m_n. On aura donc, A_n et B_n étant deux quantités indépendantes de m_n.

$$(6) \qquad \begin{aligned} p_n &= m_n \, A_n + B_n \\ q_n &= m_n \, A'_n + B'_n \end{aligned}$$

La réduite $\frac{p_n}{q_n}$ peut donc s'écrire :

(7) $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{m_n A_n + B_n}{m_n A'_n + B'_n}$$ ou, en divisant les deux termes par m_n,

(8) $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{A_n + \frac{1}{m_n} B_n}{A'_n + \frac{1}{m_n} B'_n}$$

Supposons qu'on attribue à la quantité $\frac{1}{m_n}$, dans l'expression (4), une valeur nulle, la réduite d'ordre n sera ramenée à celle d'ordre $n - 1$. Si donc on fait $\frac{1}{m_n} = O$ dans l'expression (8), on obtiendra la réduite d'ordre $n - 1$, c'est-à-dire que l'on doit avoir nécessairement :

(9) $$A_n = p_{n-1} \quad \text{et} \quad A'_n = q_{n-1}$$

Considérons de nouveau l'expression (4), et prenons en particulier l'ensemble des deux dernières fractions qui limitent la réduite d'ordre n, c'est-à-dire :

$$\cfrac{1}{m_{n-1} + \cfrac{1}{m_n}}$$

cette expression peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{m_n}{m_n\, m_{n-1} + 1}$$

Substituons dans l'expression (4), il viendra :

$$\frac{p_n}{q_n} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cdots}}$$
$$\cdots + \cfrac{1}{m_{n-2} + \cfrac{m_n}{m_n\, m_{n-1} + 1}}$$

Sous cette forme, on voit qu'en faisant $m_n = o$ dans le second membre, la

réduite d'ordre n devient celle d'ordre $n-2$. Il doit en être de même en faisant $m_n = o$ dans l'expression (7). Cela implique nécessairement :

(10) $$B_n = p_{n-2} \qquad \text{et} \qquad B'_n = q_{n-2}$$

Si l'on tient compte des égalités (9) et (10), l'expression (7) devient :

(11) $$\frac{p_n}{q_n} = \frac{m_n\, p_{n-1} + p_{n-2}}{m_n\, q_{n-1} + q_{n-2}}$$

ce qui justifie les formules (5), comme nous nous proposions de le démontrer.

Nous pouvons montrer par un procédé absolument semblable que l'on a :

(12) $$p = r_{n-1}\, p_n + r_n\, p_{n-1} \qquad \text{et} \qquad q = r_{n-1}\, q_n + r_n\, q_{n-1}$$

Il suffit, pour cela, de se reporter à l'expression (2). Un simple aperçu fait voir que, après réduction, les deux termes de la fraction du second membre sont respectivement des expressions entières et linéaires en r_n et r_{n-1} de la forme :

(13) $$\frac{p}{q} = \frac{r_{n-1}\, M + r_n\, N}{r_{n-1}\, M' + r_n\, N'}$$

On constate qu'en faisant successivement $r_n = o$, puis $r_{n-1} = o$, dans l'expression (2), le second membre se réduit, soit à $\frac{p_n}{q_n}$, soit à $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Il doit en être de même pour le second membre de l'expression (13), en posant successivement $r_n = o$ et $r_{n-1} = o$. On en conclut que :

(14) $$M = p_n \qquad \text{et} \qquad M' = q_n$$
$$N = p_{n-1} \qquad \text{et} \qquad N' = q_{n-1}$$

Il en résulte que l'on a bien :

(15) $$\frac{p}{q} = \frac{r_{n-1}\, p_n + r_n\, p_{n-1}}{r_{n-1}\, q_n + r_n\, q_{n-1}}$$

ce qui justifie les formules (12), comme nous nous proposions de le démontrer.

Si on se reporte enfin au mode de génération de la fraction continue, exposé au début du § 2 de l'Appendice, on voit bien vite qu'il existe entre les restes consécutifs r_{n-2}, r_{n-1} et r_n la relation suivante :

$$r_{n-2} = m_n r_{n-1} + r_n \tag{16}$$

— *Remarque.* — Considérons les égalités (**5**) et (**16**), on en déduit les valeurs suivantes pour m_n, savoir :

$$m_n = \frac{r_{n-2} - r_n}{r_{n-1}} = \frac{p_n - p_{n-2}}{p_{n-1}} = \frac{q_n - q_{n-2}}{q_{n-1}} \tag{17}$$

des deux dernières de ces égalités, on tire, après réduction :

$$r_{n-1} p_n + r_n p_{n-1} = r_{n-2} p_{n-1} + r_{n-1} p_{n-2} \tag{18}$$

$$r_{n-1} q_n + r_n q_{n-1} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} q_{n-2} \tag{19}$$

$$p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = -(p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2}) \tag{20}$$

Lorsqu'on envisage les expressions (**18**) et (**19**), on constate que, pour passer du premier au second membre, il suffit de changer n en $n - 1$. On voit par là, de proche en proche, que les expressions $r_{n-1}\ p_n + r_n\ p_{n-1}$, et $r_{n-1}\ q_n + r_n\ q_{n-1}$ ont toujours la même valeur, quel que soit n. C'est ce que nous savions déjà, en vertu des égalités (**12**). Ces valeurs constantes sont respectivement égales à p et à q.

Lorsqu'on envisage l'expression (**20**), on constate encore que la parenthèse du second membre se déduit du premier, en changeant n en $n - 1$. On en conclut que l'expression $p_{n-1}\ q_n - p_n\ q_{n-1}$ a toujours la même valeur absolue, quel que soit n, mais le signe change en raison de la parité ou de l'imparité du nombre n. Pour fixer la valeur et le signe de cette constante, il suffit d'attribuer à n une valeur particulière, $n = 2$ par exemple, on a :

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{m_1}{1} \quad \text{et} \quad \frac{p_2}{q_2} = m_1 + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 m_2 + 1}{m_2}$$

On en tire :

$$p_1\ q_2 - p_2\ q_1 = -1$$

La valeur constante de l'expression $p_{n-1}\,q_n - p_n\,q_{n-1}$ est donc l'unité. Quant au signe, il est donné par le symbole, soit $(-1)^{n-1}$, soit $-(-1)^n$, et on a :

$$(21)\qquad p_{n-1}\,q_n - p_n\,q_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n-1}$$

§ 4. — Comparaison des réduites à la fraction complète.

Considérons la fraction $\frac{p}{q}$ et les deux réduites consécutives $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ et $\frac{p_n}{q_n}$. L'expression (15) donne :

$$\frac{p}{q} = \frac{r_{n-1}\,p_n + r_n\,p_{n-1}}{r_{n-1}\,q_n + r_n\,q_{n-1}}$$

pour effectuer la comparaison avec les réduites considérées, formons les quotients :

$$\frac{p}{q} : \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p\,q_{n-1}}{q\,p_{n-1}} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} : \frac{p_n}{q_n} = \frac{p\,q_n}{q\,p_n}$$

On trouve :

$$(22)\qquad \frac{p\,q_{n-1}}{q\,p_{n-1}} = \frac{r_{n-1}\,p_n\,q_{n-1} + r_n\,p_{n-1}\,q_{n-1}}{r_{n-1}\,q_n\,p_{n-1} + r_n\,q_{n-1}\,p_{n-1}} = \frac{p_n\,q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}\,p_{n-1}\,q_{n-1}}{q_n\,p_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}\,q_{n-1}\,p_{n-1}}$$

$$(23)\qquad \frac{p\,q_n}{q\,p_n} = \frac{r_{n-1}\,p_n\,q_n + r_n\,p_{n-1}\,q_n}{r_{n-1}\,q_n\,p_n + r_n\,q_{n-1}\,p_n} = \frac{q_n\,p_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_n}\,p_n\,q_n}{p_n\,q_{n-1} + \frac{r_{n-1}}{r_n}\,p_n\,q_n}$$

Les expressions (22) et (23) montrent que les quotients considérés sont respectivement formés des deux fractions $\frac{p_n\,q_{n-1}}{q_n\,p_{n-1}}$ et $\frac{q_n\,p_{n-1}}{p_n\,q_{n-1}}$ à chacun des termes desquelles on ajoute une même quantité. Il en résulte que ces quotients sont respectivement plus grands ou plus petits que l'unité en même temps que $\frac{p_n\,q_{n-1}}{q_n\,p_{n-1}}$ et $\frac{q_n\,p_{n-1}}{p_n\,q_{n-1}}$. Mais ces deux dernières expressions sont

l'inverse l'une de l'autre ; si donc l'une d'elles est plus grande que l'unité, l'autre est plus petite. Il en résulte que si l'un des deux quotients défini par les équations (**22**) et (**23**) est plus grand que un, l'autre est plus petit. Cela implique que parmi deux réduites consécutives, il y en a une qui est plus grande que la fraction complète et l'autre plus petite. La grandeur de la fraction complète est donc toujours comprise entre celles de deux réduites consécutives.

Nous allons montrer que, parmi les deux réduites consécutives considérées, celle dont l'ordre est le plus élevé s'approche davantage de la fraction complète.

On sait que lorsqu'on ajoute une même quantité aux deux termes d'une fraction, on la rapproche de l'unité d'autant plus que la quantité ajoutée est plus grande. Considérons donc les derniers membres des équations (**22**) et (**23**). La quantité ajoutée aux deux termes, dans la première, est :

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \; p_{n-1} \; q_{n-1}$$

La quantité ajoutée aux deux termes dans la seconde, est :

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} \; p_n \; q_n$$

Or, ainsi qu'on l'a remarqué au début du § 3, on a :

$$r_n < r_{n-1} \qquad p_{n-1} < p_n \qquad \text{et} \qquad q_{n-1} < q_n$$

Il en résulte que :

$$\frac{r_n}{r_{n-1}} \; p_{n-1} \; q_{n-1} < \frac{r_{n-1}}{r_n} \; p_n \; q_n$$

Les quantités ajoutées à chacun des deux termes du dernier membre des fractions, dans les expressions (**22**) et (**23**) sont donc plus grandes pour la dernière, donc $\frac{p\, q_n}{q\, p_n}$ est plus voisin de un que $\frac{p\, q_{n-1}}{q\, p_{n-1}}$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

§ 5. — Comparaison de deux réduites consécutives.

Soit à comparer les réduites d'ordre $n - 1$ et d'ordre n ; on en fera le quotient, savoir :

$$\frac{p_{n-1}\, q_n}{q_{n-1}\, p_n}$$

La différence des deux termes est donnée par l'expression (**21**) :

$$p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n-1}$$

Cette différence est donc positive si n est impair et négative si n est pair. Dans le premier cas la réduite précédente est plus grande que la suivante. Elle est au contraire plus petite dans le second cas.

Nous allons appliquer les considérations qui précèdent à la recherche des attractions.

§ 6. — Attractions principales des intervalles quelconques.

Dans le cas des intervalles primaires, on a défini les attractions principales, celles qui permettent de passer de l'intervalle donné à l'un ou à l'autre des intervalles primaires adjacents. Nous allons généraliser cette notion, pour les intervalles quelconques.

Considérons l'intervalle quelconque $\left(\frac{p}{q}\right)$ et envisageons la fraction continue correspondante, donnée par l'équation (**3**). On remarque que p et q ne sont pas autre chose que les termes de la réduite d'ordre K, on a donc $p = p_K$ et $q = q_K$. On tire de l'expression (**21**) la relation suivante :

$$p_{K-1}\, q_K - q_{K-1}\, p_K = -(-1)^K = (-1)^{K-1}$$

ou, ce qui revient au même :

$$p_{K-1}\, q - q_{K-1}\, p = -(-1)^K = (-1)^{K-1}$$

Reportons-nous à la figure (1), cette égalité signifie que l'empreinte d'ordre p_{K-1} est à l'unité de distance de la fenêtre d'ordre q_{K-1}. Il est bien clair que cette dernière fenêtre attire l'empreinte voisine, puisque celle-ci n'en est éloignée que de une unité, tandis que le point neutre est à une distance plus grande, marquée par $\frac{q}{2}$ (on suppose q plus grand que un). Le parcours du son, tel qu'il résulte de cette attraction, correspond à l'intervalle :

$$\left(\frac{p_{K-1}\, q_K}{q_{K-1}\, p_K}\right)$$

La différence des deux termes étant égale à l'unité, le déplacement du son se fait suivant un intervalle primaire, dans le sens positif si K est impair, et dans le sens négatif si K est pair. Afin de bien marquer que la fenêtre q_{K-1} et l'empreinte correspondante p_{K-1} donnent lieu à une attraction qui déplace le son suivant un intervalle primaire, nous les désignerons par les lettres Q_1 et P_1 et on aura :

$$(24) \qquad P_1\, q - Q_1\, p = -(-1)^K$$

On sait que, dans un compartiment d'intervalle, tout est symétrique. La fenêtre d'ordre $q - Q_1$ et l'empreinte d'ordre $p - P_1$ sont donc séparés également par l'unité de distance, mais, pour l'attraction qui en résulte, le parcours du son se fait en sens contraire ; on aura en effet :

$$(p - P_1)\, q - (q - Q_1)\, p = -(P_1\, q - Q_1\, p) = (-1)^K$$

Le son parcourt encore un intervalle primaire. Nous désignerons dès lors la fenêtre et l'empreinte $q - Q_1$ et $p - P_1$ par les lettres Q'_1 et P'_1 et on aura :

$$(25) \qquad P'_1\, q - Q'_1\, p = (-1)^K$$

Les intervalles $\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)$ et $\left(\frac{P'_1}{Q'_1}\right)$ qui correspondent aux empreintes et aux fenêtres les plus voisines, puisqu'elles sont à l'unité de distance, définissent ce que nous appelons les attractions principales. Les mouvements du son se font suivant des intervalles primaires, savoir :

$$\left(\frac{P_1\, q}{Q_1\, p}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{P'_1\, q}{Q'_1\, p}\right)$$

L'un des déplacements est positif et l'autre négatif, conformément aux signes indiqués par les seconds membres des égalités (**24**) et (**25**).

Ajoutons toutefois, pour que cette définition concorde absolument avec celle que nous avons donnée pour les intervalles primaires, qu'il faut prendre, pour la première des deux attractions, son homologue du second compartiment. C'est ce que nous allons vérifier.

Soit l'intervalle primaire $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q+1}{q}\right)$, on a :

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{q}$$

On aura : $P_1 = 1 \quad Q_1 = 1 \qquad P'_1 = p - 1 = q + 1 - 1 = q$ et $Q'_1 = q - 1$

Les attractions considérées amènent donc le son de l'intervalle $\left(\frac{q+1}{q}\right)$ à chacun des suivants :

$$\left(\frac{1}{1}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{q}{q-1}\right)$$

Ramenons la première à son homologue du second compartiment, et on aura, pour ces attractions, les intervalles suivants :

$$\left(\frac{q+2}{q+1}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{q}{q-1}\right)$$

Intervalles qui sont bien les deux intervalles primaires adjacents à celui d'où l'on est parti $\left(\frac{q+1}{q}\right)$.

Les termes P'_1 et Q'_1 correspondent au numérateur et au dénominateur de la fraction ordinaire équivalente à la fraction continue suivante :

$$(26) \qquad \frac{P'_1}{Q'_1} = m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \cdots + \cfrac{1}{m_{K-1} + \cfrac{1}{m_K - 1}}}}$$

On peut le vérifier facilement de la manière suivante :

Considérons l'expression (**3**), on sait que l'on a :

$$p = p_K = m_K p_{K-1} + p_{K-2} \qquad q = q_K = m_K q_{K-1} + q_{K-2}$$

Pour passer de l'expression (**3**) à l'expression (**26**), il suffit de changer m_K en $m_K - 1$. Opérons la même substitution dans les seconds membres des expressions précédentes, on obtient :

$$(m_K - 1)\ p_{K-1} + p_{K-2} \quad \text{et} \quad (m_K - 1)\ q_{K=1} + q_{K-2}$$

qui se réduisent à :

$$p_K - p_{K-1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad p - P_1 \quad \text{ou encore} \quad P'_1$$

$$q_K - q_{K-1} \quad — \quad q - Q_1 \quad — \quad Q'_1$$

§ 7. — Les attractions en général.

Nous avons montré, au § 1 de cet appendice, comment, dans un compartiment d'intervalle, les empreintes étaient séparées des fenêtres les plus voisines par des distances égales, respectivement deux par deux et symétriquement, à tous les nombres entiers égaux ou inférieurs à $\frac{q}{2}$. Nous avons obtenu, avec les attractions principales, celles des empreintes qui sont à une unité de distance de la fenêtre voisine. Nous allons chercher à trouver celles des empreintes qui sont à la distance E de la fenêtre la plus voisine, étant entendu que E est plus petit que $\frac{q}{2}$, ou au plus égal.

De même qu'il existe deux attractions principales caractérisées par les intervalles $\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)$ et $\left(\frac{P'_1}{Q'_1}\right)$, de même il existe deux attractions correspondant à chaque distance donnée E. Nous allons précisément rattacher chacune de ces dernières attractions à l'une ou à l'autre des attractions principales, selon qu'elle devra être croissante ou décroissante. Supposons qu'on veuille étudier celle des attractions en question qui doit être de même sens que la première des deux attractions principales. Nous savons que l'on a :

$$P_1 q - Q_1 p = -(-1)^K \tag{27}$$

Multiplions les deux membres par E, il vient :

(**28**) $$E P_1 q - E Q_1 p = - E (-1)^K$$

Cela signifie que l'empreinte d'ordre $E P_1$ est à une distance E de la fenêtre $E Q^1$, avec écart dans le même sens que la première attraction principale. Mais cette empreinte et cette fenêtre ne seront plus nécessairement dans le premier compartiment. Tous les compartiments d'un intervalle étant semblables, rien n'est plus facile que de trouver les empreintes et les fenêtres homologues de chacun des compartiments antérieurs. Il suffit pour cela de retrancher de $E P_1$ et de $E Q_1$, le même nombre de fois p et q. S'il s'agit d'obtenir l'empreinte et la fenêtre du premier compartiment, il faudra retirer de $E P_1$ et de $E Q_1$, autant de fois p et q qu'on le pourra. Il en résulte d'abord que les quotients entiers de $E P_1$ par p et de $E Q_1$ par q sont les mêmes ; soit C la valeur de ce quotient commun, et soient P_E et Q_E les restes des divisions correspondantes, on aura :

$$E P_1 = C p + P_E$$

$$E Q_1 = C q + Q_E$$

avec les conditions $P_E < p$ et $Q_E < q$

Remplaçons ces deux valeurs dans (**28**), on obtiendra :

$$(C p + P_E) q - (C q + Q_E) p = - E (-1)^K$$

Toutes réductions faites il reste :

(**29**) $$P_E q - Q_E p = - E (-1)^K$$

ce qui montre bien que l'empreinte P_E et la fenêtre Q_E, qui sont dans le premier compartiment, répondent à la question d'être éloignées l'une de l'autre de E, et dans le même sens que pour le cas de la première attraction principale. Quant au mouvement du son, il est donné par l'intervalle :

$$\left(\frac{P_E q}{Q_E p}\right)$$

qui n'est plus primaire, puisque la différence des deux termes est E, ce nombre indique donc s'il s'agit d'un intervalle binaire, ternaire, etc. Toutefois, l'ordre de l'intervalle peut ne pas être caractérisé par ce nombre E, dans les cas où on trouverait des facteurs communs aux deux termes de la fraction.

Quant aux valeurs de P_E et de Q_E, on les tire de ce qui précède :

$$(30) \qquad \begin{aligned} P_E &= E P_1 - C p \\ Q_E &= E Q_1 - C q \end{aligned}$$

Il est bien évident que nous pourrions trouver de la même manière l'attraction correspondant au même écart E entre l'empreinte et la fenêtre, mais se rattachant, quant au sens, à la seconde attraction principale. On partirait de l'équation :

$$(31) \qquad P'_1 q - Q'_1 p = -(-1)^K$$

En multipliant par E, on trouve :

$$(32) \qquad E P'_1 q - E Q'_1 p = E(-1)^K$$

C' sera le quotient commun de $E P'_1$ par p et de $E Q'_1$ par q ; on posera :

$$(33) \qquad \begin{aligned} E P'_1 &= C' p + P'_E \\ E Q'_1 &= C' q + Q'_E \end{aligned}$$

avec les conditions : $P'_E < p$ et $Q'_E < q$

on trouvera :

$$(34) \qquad P'_E q - Q'_E p = E(-1)^K$$

qui définit une attraction de même sens que la seconde attraction principale, pour une empreinte et une fenêtre séparées par la distance E. Le mouvement du son est donné par l'intervalle :

$$\left(\frac{P'_E q}{Q'_E p}\right)$$

Les termes P'_E et Q'_E sont donnés par les formules :

(35)
$$P'_E = E\,P'_1 - C'\,p$$
$$Q'_E = E\,Q'_1 - C'\,q$$

Les deux attractions qui correspondent au même écart E en valeur absolue, mais de signes contraires, étant symétriquement placées dans le compartiment, on a nécessairement :

(36)
$$P_E + P'_E = p$$
$$Q_E + Q'_E = q$$

On vérifierait facilement encore que $C + C' = E + 1$.

On peut remarquer enfin que les termes P_E et Q_E sont précisément les deux termes de la fraction ordinaire provenant de la fraction continue suivante :

(37)
$$m_1 + \cfrac{1}{m_2 + \cfrac{1}{m_3 + \dots + \cfrac{1}{m_{K-1} + \cfrac{1}{m_K - \cfrac{E}{C}}}}}$$

Cette fraction peut en effet se déduire de l'expression suivante de la dernière réduite :

$$\frac{\left(m_K - \frac{E}{C}\right) p_{K-1} + p_{K-2}}{\left(m_K - \frac{E}{C}\right) q_{K-1} + q_{K-2}}$$

qui donne :

$$\frac{C\,(m_K\,p_{K-1} + p_{K-2}) - E\,p_{K-1}}{C\,(m_K\,q_{K-1} + q_{K-2}) - E\,q_{K-1}}$$

Mais les parenthèses représentent les valeurs p et q, il vient donc :

$$\frac{C\,p - E\,P_1}{C\,q - E\,Q_1} = \frac{-P_E}{-Q_E} = \frac{P_E}{Q_E}$$

Pour déduire de l'expression (37) les termes P'_E et Q'_E, il suffit de remplacer C par $C + 1$, le premier membre de la dernière égalité devient en effet :

$$\frac{C\,p + p - E\,P_1}{C\,q + q - E\,Q_1} = \frac{p - P_E}{q - Q_E} = \frac{P'_E}{Q'_E}$$

§ 8. — Les attractions principales correspondent aux moindres déplacements des sons.

Comme on l'a vu, toutes les attractions se partagent en deux parties qui se rattachent à chacune des attractions principales. Les unes sont croissantes et les autres décroissantes. Considérons dès lors toutes les attractions de même sens que la première attraction principale par exemple, et envisageons en particulier le déplacement correspondant à une de ces attractions :

$$\left(\frac{P_E\,q}{Q_E\,p}\right)$$

Remplaçons P_E et Q_E par les valeurs tirées de (30), on obtient :

$$(38) \qquad \left(\frac{E\,P_1\,q - C\,p\,q}{E\,Q_1\,p - C\,p\,q}\right)$$

d'un autre côté, le déplacement de l'attraction principale est $\left(\frac{P_1\,q}{Q_1\,p}\right)$ ou, ce qui revient au même :

$$(39) \qquad \left(\frac{E\,P_1\,q}{E\,Q_1\,p}\right)$$

Or, on passe de (38) à (39) en ajoutant aux deux termes de la fraction le même nombre $C\,p\,q$, donc la fraction (39) est plus voisine de l'unité que (38) et l'intervalle correspondant moindre.

La même démonstration s'applique naturellement à la seconde série d'attractions qui se rattachent à la seconde attraction principale.

Cette proposition correspond à la propriété suivante : Parmi toutes les fractions ordinaires qu'on peut former avec des nombres moindres que p et q, les fractions les plus voisines de $\frac{p}{q}$ par excès ou par défaut, sont les deux fractions $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P'_1}{Q'_1}$.

On peut ajouter que, parmi ces dernières, celle qui se rapproche le plus de $\frac{p}{q}$, en valeur absolue, est la seconde. Considérons en effet les fractions qui représentent le mouvement du son dans les deux cas :

$$\frac{P_1 q}{Q_1 p} \quad \text{et} \quad \frac{P'_1 q}{Q'_1 p}$$

et voyons de combien elles diffèrent de l'unité. On a pour la première :

$$1 - \frac{P_1 q}{Q_1 p} = \frac{Q_1 p - P_1 q}{Q_1 p} = \frac{(-1)^K}{Q_1 p}$$

On a de même pour la seconde :

$$1 - \frac{P'_1 q}{Q'_1 p} = \frac{Q'_1 p - P'_1 q}{Q'_1 p} = \frac{-(-1)^K}{Q'_1 p}$$

Les écarts, en valeur absolue, sont donc respectivement $\frac{1}{Q_1 p}$ d'une part et $\frac{1}{Q'_1 p}$ d'autre part. Or, Q'_1 est plus grand que Q_1, donc la seconde des deux attractions principales correspond au moindre déplacement du son et enfin, la fraction $\frac{P'_1}{Q'_1}$ est plus voisine de $\frac{p}{q}$ que la fraction $\frac{P_1}{Q_1}$.

§ 9. — **Dans chaque compartiment, les attractions homologues des attractions principales sont celles qui correspondent au moindre déplacement.**

Soit à considérer le compartiment d'ordre S, et envisageons une des attractions principales, la première par exemple. Elle conduit le son de l'inter-

valle $\frac{p}{q}$ à l'intervalle $\frac{P_1}{Q_1}$ moyennant un déplacement $\frac{P_1 q}{Q_1 p}$. L'attraction homologue du compartiment d'ordre S aboutit à l'intervalle :

$$\left(\frac{P_1 + (S-1)p}{Q_1 + (S-1)q}\right) \text{ moyennant le déplacement } \left(\frac{P_1 q + (S-1)pq}{Q_1 p + (S-1)pq}\right)$$

Toute autre attraction, dans le même compartiment, aboutit à un intervalle de la forme :

$$\left(\frac{P_E + (S-1)p}{Q_E + (S-1)q}\right) \text{ moyennant le déplacement } \left(\frac{P_E q + (S-1)pq}{Q_E p + (S-1)pq}\right)$$

Il s'agit de comparer le premier déplacement au second et de montrer qu'il est plus petit. Pour cela, nous remplaçons dans la seconde expression P_E et Q_E par leurs valeurs (**30**), nous obtenons :

$$\frac{E P_1 q - C p q + (S-1)pq}{E Q_1 p - C p q + (S-1)pq} \tag{40}$$

Voyons de combien cette fraction diffère de l'unité, par la différence suivante :

$$1 - \frac{E P_1 q - C p q + (S-1)pq}{E Q_1 p - C p q + (S-1)pq} = \frac{E(-1)^K}{E Q_1 p - C p q + (S-1)pq} \tag{41}$$

Voyons d'autre part de combien la fraction qui représente le mouvement homologue de l'attraction principale diffère de l'unité, on trouve :

$$1 - \frac{P_1 q + (S-1)pq}{Q_1 p + (S-1)pq} = \frac{(-1)^K}{Q_1 p + (S-1)pq} \tag{42}$$

On peut multiplier les deux termes de cette fraction par E sans en changer la valeur, il vient :

$$\frac{E(-1)^K}{E Q_1 p + E(S-1)pq} \tag{43}$$

Le second membre de (**41**) a même numérateur que (**43**) ; la plus petite des deux expressions est donc celle pour laquelle le dénominateur est plus grand. Nous allons montrer que le dénominateur de (**43**) est plus grand que celui de (**41**), savoir :

$$E\,Q_1\,p + E\,(S-1)\,p\,q > E\,Q_1\,p - C\,p\,q + (S-1)\,p\,q$$

Si cette inégalité est vraie, elle entraîne la suivante :

$$E\,(S-1)\,p\,q > -C\,p\,q + (S-1)\,p\,q \qquad \text{ou encore}$$

$$(E-1)\,(S-1) + C > O$$

E et S sont nécessairement plus grands que un ; quant à C, il est toujours positif ou nul, donc cette inégalité est toujours vérifiée et notre proposition est démontrée.

Il est bien évident que ce que nous disons pour une des attractions principales comparée aux autres attractions de même sens, s'applique à l'autre, pour les attractions de sens contraire.

Cette proposition correspond à la propriété suivante : Parmi toutes les fractions ordinaires que l'on peut former avec des nombres entiers compris entre $S\,p$ et $(S-1)\,p$, d'une part, et entre $S\,q$ et $(S-1)\,q$, d'autre part, celles qui se rapprochent le plus de la fraction $\frac{p}{q}$ sont les suivants :

$$\frac{P_1 + (S-1)\,p}{Q_1 + (S-1)\,q} \qquad \text{et} \qquad \frac{P'_1 + (S-1)\,p}{Q'_1 + (S-1)\,q}$$

On peut même ajouter que c'est la seconde expression qui est la plus approchée. On le montrerait comme pour les attractions principales, au § précédent.

§ 10. — **Applications.**

Les observations qui précèdent permettent le calcul direct et immédiat de toutes les attractions, elles donnent aussi le moyen de calculer dans tous les cas les déplacements du son.

A l'égard de la consonnance et de la dissonnance, on opère les vérifications au moyen des intervalles suivants que devrait parcourir le son suivant les attractions principales.

$$\left(\frac{P'_1 q}{Q'_1 p}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{P_1 q}{Q_1 p}\right)$$

et en constatant qu'ils sont supérieurs ou inférieurs à la tolérance.

Ainsi, l'intervalle $\left(\frac{16}{9}\right)$ donne :

$$\frac{p}{q} = \frac{16}{9} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$$

On en tire : $$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{7}{4} \qquad \text{et} \qquad \frac{P'_1}{Q'_1} = \frac{9}{5}$$

Quant au déplacement du son, il est :

$$\left(\frac{P_1 q}{Q_1 p}\right) = \left(\frac{64}{63}\right) = j \qquad \left(\frac{P'_1 q}{Q'_1 p}\right) = - i$$

Il s'agit donc d'un intervalle dans un état particulier dissonnant. Cette dissonnance est même double en vertu de ce qui précède.

A l'égard des inflexions, on appliquera le § 9. Supposons par exemple qu'il faille trouver les inflexions de l'intervalle de quinte, on aura :

$$\frac{p}{q} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} \qquad P_1 = 1 \quad Q_1 = 1 \quad P'_1 = 2 \quad Q'_1 = 1$$

Les attractions homologues des principales, dans le compartiment d'ordre S conduisent le son dans les positions suivantes :

$$\frac{1 + (S-1) \times 3}{1 + (S-1) \times 2} \qquad \text{et} \qquad \frac{2 + (S-1) \times 3}{1 + (S-1) \times 2}$$

Les déplacements correspondants du son donnent :

$$\frac{2 + 6\ (S - 1)}{3 + 6\ (S - 1)} \quad \text{et} \quad \frac{4 + 6\ (S - 1)}{3 + 6\ (S - 1)}$$

Pour qu'il y ait confusion, il faut remplir les conditions suivantes :

$$3 + 6\ (S - 1) \geq 36 \quad \text{et} \quad 4 + 6\ (S - 1) \geq 36$$

ce qui implique $S \geq 7$

La quinte ne commence donc ses inflexions que bien au delà des empreintes directes, et pour aboutir aux intervalles suivants, correspondants à $S = 7$:

$$\frac{20}{13} \quad \text{et} \quad \frac{19}{13}$$

Ces inflexions portent même sur des empreintes inexistantes. On ne trouve, pour la quinte, une inflexion portant sur des empreintes additionnelles que dans le 11ième compartiment, savoir :

$$\frac{2 + (11 - 1) \times 3}{1 + (11 - 1) \times 2} = \frac{32}{21}$$

La quinte est donc un intervalle de consonnance parfaite, comme nous l'avons dit.

Considérons de la même manière l'intervalle $\left(\frac{5}{3}\right)$ par exemple et proposons-nous de trouver ses inflexions. On aura :

$$\frac{5}{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} \qquad P_1 = 2 \quad Q_1 = 1 \quad P'_1 = 3 \quad Q'_1 = 2$$

Les attractions homologues des principales, dans le compartiment d'ordre S conduisent le son dans les positions suivantes :

$$\frac{2 + (S - 1) \times 5}{1 + (S - 1) \times 3} \quad \text{et} \quad \frac{3 + (S - 1) \times 5}{2 + (S - 1) \times 3}$$

Les déplacements correspondants du son donnent :

$$\frac{6 + 15\ (S - 1)}{5 + 15\ (S - 1)} \quad \text{et} \quad \frac{9 + 15\ (S - 1)}{10 + 15\ (S - 1)}$$

Pour qu'il y ait confusion, il faut remplir les conditions suivantes :

$$6 + 15\ (S - 1) \geq 36 \quad \text{et} \quad 10 + 15\ (S - 1) \geq 36$$

soit $S \geq 3$ et $S \geq 3$

La sixte mineure $\frac{5}{3}$ commence donc ses inflexions avec les intervalles suivants :

$$\frac{12}{7} \quad \text{et} \quad \frac{13}{8}$$

Le premier seul porte sur des empreintes existantes, en même temps que sur l'empreinte directe 7, la consonnance n'est donc pas parfaite.

Il va sans dire que nous pourrions multiplier ces exemples de calcul, mais il convient de nous limiter, afin de ne pas fatiguer inutilement le lecteur. Indépendamment de l'intérêt que cet appendice présente par lui-même, nous croyons qu'il aura pour effet d'accentuer encore la preuve des relations intimes qui lient la théorie de la musique à celles des nombres.



TABLE DES MATIÈRES

PAGES

INTRODUCTION VII

CHAPITRE I

La perception des sons, les intervalles

1. — Cordes libres 1
2. — Cordes de l'oreille 2
3. — Empreintes 2
4. — Zone d'équilibre, zone de trouble 3
5. — Points neutres 3
6. — Mouvement mélodique. — Pivot. — Fenêtres. — Attractions 4
7. — Equilibre relatif. — Intervalle et stabilité. — Instabilité, attractions indécises et dédoublement du son 5
8. — Notation des intervalles. — Rapport des vibrations 5
9. — Sons implicites. — Sons harmoniques ou virtuels. — Equilibre absolu. Intervalles originaux 7
10. — Position des points neutres. — Octave 8
11. — Support réel. — Intervalles égaux 10
12. — Addition et soustraction des intervalles 11
13. — Support virtuel 12
14. — Sons conjugués. — Intervalles différentiels 14
15. — L'épaisseur de la zone d'équilibre est la même pour toutes les empreintes d'un même son 15

CHAPITRE II

Calcul des attractions

1. — Les attractions sont indépendantes de la loi suivant laquelle sont réparties les cordes de l'oreille 17

PAGES

2. — Tracé des empreintes le plus propre au calcul des attractions 18
3. — Compartiment d'un intervalle 19
4. — Abaque 21
5. — Règle pour le calcul des attractions 25
6. — Intervalles primaires, binaires, ternaires, etc 28
7. — Formule simplifiée pour les intervalles primaires 29
8. — Qualités des attractions 31

CHAPITRE III

Théorie des trois sons

1. — Cas dans lequel un son se dédouble 35
2. — Mouvement des sons dans le dédoublement 36
3. — Equilibre des sons simultanés. — Son préalable 37
4. — Seconde manière de dédoublement 38
5. — Concentration de deux sons. — Instabilité. — Sons préalables 40
6. — Seconde manière de concentration 41
7. — Tableau des trois sons par dédoublement et par concentration 43

CHAPITRE IV

Les attractions indirectes

1. — Nouvelle conception de l'attraction 47
2. — Calcul des attractions indirectes 49
3. — De l'équilibre absolu avec les attractions indirectes 50
4. — Dédoublement indirect d'un son 51
5. — Concentration indirecte de deux sons 52
6. — Tableau des trois sons par dédoublement ou concentration indirecte 54

CHAPITRE V

Faisceaux harmoniques

1. — Généralisation de l'abaque 57
2. — Du changement de pivot 59

PAGES

3. — Sons ayant mêmes supports réels ou virtuels 61
4. — Sons conjugués et intervalles originaux 62
5. — Représentation des trois sons de la théorie 64
6. — Nouvelle généralisation de l'abaque 66

CHAPITRE VI

Périodicité

1. — Premiers groupements de trois sons (P) 69
2. — Intervalle d'équilibre complet. — Quasi identité des sons 70
3. — De l'intuition 70
4. — Les intervalles normaux redoublés ou renversés donnent lieu aux mêmes attractions 71
5. — Périodicité 73
6. — Incompatibilité 74
7. — Comparaison avec le mouvement circulaire. — Identification des sons périodiques 75
8. — Etat particulier et état général d'un son. — Etat particulier et état général d'un intervalle 75
9. — Intervalles originaux 76
10. — Répliques et repos 77
11. — De la notion de direction. — Incohérence 79
12. — Interprétation intuitive des mouvements directs et indirects 80
13. — Intervalles différentiels 82
14. — Généralisation de la théorie des trois sons 84

CHAPITRE VII

Cadence et Évolution

1. — Groupements de trois sons (C) 87
2. — Cadence proprement dite 88
3. — La cadence est aussi une concentration 88
4. — Cadence mélodique 89
5. — Evolution 90
6. — Dominante et fondamentale 90
7. — Cadence partielle 90

PAGES

8. — Dédoublements et concentrations résultant des cadences partielles 96
9. — Cadence élidée 99
10. — Cadence élidée partielle 100
11. — Dédoublements et concentrations avec les cadences élidées et élidées partielles 102
12. — Echelle des cadences 104
13. — Echelle des évolutions 105
14. — Incohérences à signaler 106
15. — Les mouvements contraires 110

CHAPITRE VIII

Les accords parfaits

1. — Groupements de trois sons (*A P M* et *A P m*) 115
2. — Accord parfait majeur, état général, états particuliers 116
3. — Accord parfait mineur, état général, états particuliers 117
4. — Fondamentale, médiante, dominante. — Stabilité et instabilité 118
5. — Changements de position 119
6. — Chute et volte. — Chute partielle, chute élidée 120
7. — Caractères distinctifs des accords majeurs et mineurs 123
8. — Sillons qui résultent des mouvements des accords, ou formation de l'échelle diatonique. Comma mineur 125
9 — Comparaison de l'échelle diatonique avec les échelles des cadences et des évolutions. Comma majeur 127
10. — Accords de septième de dominante et de septième de sensible 129

CHAPITRE IX

L'adaptation

1. — Facultés d'adaptation 135
2. — Faculté *H* 136
3. — Empreintes directes. — Additionnelles. — Douteuses, ... 136
4. — Faculté *Z*. — Empreintes personnelles 138
5. — Limite du nombre des empreintes distinctes d'un son donné 140
6. — Marche progressive de la faculté *H* 141
7. — Extension complémentaire de la zone d'équilibre. — Tolérance 145
8. — Impossibilité d'une nouvelle extension de la faculté *H* 146

PAGES

9. — Importance des commas et de la tolérance. — Nécessité d'un tempérament moyen 148
10. — Classement définitif des empreintes 150
11. — Limite des rapports des sons entre eux 151
12. — Limite des sons perceptibles 151

CHAPITRE X

Consonnance et Dissonnance

1. — Intervalles complets et intervalles incomplets 155
2. — Etat défini d'un intervalle complet 156
3. — Intervalles consonnants 158
4. — Intervalles dissonnants 159
5. — Accords consonnants 160
6. — Accords dissonnants 160
7. — Accord mixte 162
8. — Inflexions des intervalles consonnants. — Consonnance parfaite et imparfaite. 163
9. — Inflexions des intervalles dissonnants. — Inflexions anharmoniques 165
10. — Les sons indicateurs 169
11. — Sons réels et sons repérés 174

CHAPITRE XI

Echelle diatonique. — Tempérament

1. — Echelle diatonique 178
2. — Symétrie. — Axes 179
3. — Premier axe, son de liaison 181
4. — Intervalles diatoniques 182
5. — Intervalle chromatique. — Dièze, bémol 184
6. — Deuxième axe, axe modal, comma anharmonique 185
7. — Intervalles anharmoniques 187
8. — Tableau général des intervalles 189
9. — Changements d'échelle 190
10. — Altérations chromatiques directes 191
11. — Expression approchée des intervalles 192
12. — Tempérament. — Clavier 194
13. — Polygone des tonalités 196
14. — Notation et solfège 197

CHAPITRE XII

Les Modes

PAGES

1. — Origine de la distinction des modes 199
2. — Le mode majeur d'après les cadences 200
3. — Tonique. — Dominante. — Sous-dominante. — Sensible. — Médiante 200
4. — Mode majeur avec les simples accords parfaits. Cadence majeure 201
5. — L'échelle des évolutions manque de repos 202
6. — Cadence mineure 203
7. — Echelle diatonique mineure 206
8. — Inflexions des intervalles sur l'échelle diatonique mineure 208
9. — Accord de septième de dominante 209
10. — Accord de septième de sensible mineur, ou de septième diminuée. — Accord de neuvième diminuée 211
11. — Incohérence à signaler 213
12. — Modes secondaires 214
13. — Modes spéciaux 217

CHAPITRE XIII

Génération des accords

1. — Utilisation des derniers groupements de trois sons 221
2. — Accord de neuvième de dominante 223
3. — Accords de neuvième, majeurs et mineurs 225
4. — Accords de neuvième de médiante et de sensible 227
5. — Il n'y a pas d'accords de plus de cinq sons 228
6. — Accords de septième, majeurs et mineurs 229
7. — Nomenclature des accords 230
8. — Génération des accords. — Son préalable, préparation. — Son final, fondamentale. 230
9. — Incohérences à signaler 231

CHAPITRE XIV

La Tonalité

1. — Les accords parfaits indiquent un état harmonique 235
2. — Les accords dissonnants indiquent un mouvement de deux accords 235
3. — Les quatre lyres 237
4. — Mouvements des accords parfaits, dans le sens direct, suivant les intervalles diatoniques. 242

PAGES

5. — Les accords ne peuvent se mouvoir suivant l'intervalle chromatique 245
6. — Harmonie consonnante 246
7. — Incohérences à signaler.. 246
8. — Résolution des accords dissonnants.. 247
9. — Tonalité 250
10. — Modulation 252
11. — Les parties.. 254

CHAPITRE XV

Anharmonie

1. — Comma mineur.. 261
2. — Comma majeur.. 262
3. — Comma anharmonique 265
4. — Inflexions du comma anharmonique.. 267
5. — Formation générale des intervalles anharmoniques.. 269
6. — Changements anharmoniques rationnels et artificiels 271
7. — Modulations anharmoniques 272
8. — Grandeur comparée des demi-tons diatoniques et chromatiques 273

APPENDICE

A. — REMARQUE SUR LES SONS COMPOSÉS.

B. — GÉNÉRALISATION DES CALCULS RELATIFS AUX ATTRACTIONS, A LA CONSONNANCE ET AUX INFLEXIONS DES INTERVALLES

1. — Comparaison de deux nombres p et q, premiers entre eux.................. 279
2. — Fractions continues 280
3. — Réduites, fractions complémentaires.. 282
4. — Comparaison des réduites à la fraction complète.. 286
5. — Comparaison de deux réduites consécutives 288
6. — Attractions principales des intervalles quelconques.. 288
7. — Les attractions en général 291
8. — Les attractions principales correspondent aux moindres déplacements du son. 295
9. — Dans chaque compartiment, les attractions homologues des attractions principales sont celles qui correspondent aux moindres déplacements 298
10. — Applications.. 296

ERRATA

Pages 9, 2e alinéa, 5e ligne — *lire* : $\left(\frac{2p+1}{2}\right)$ *au lieu de* : $\left(\frac{2p \times 1}{2}\right)$.

— 19, § 3, 3e équation — *lire* : $n_1 = p\ q\ n$ *au lieu de* : $N_1 = p\ q\ n$.

— 30, dernière ligne — *lire* : (**27**) *au lieu de* : (**28**).

— 45, figure (**48**), dernière ligne — *lire* : $\left(\frac{9}{10}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{9}{8}\right)$ *au lieu de* : $\left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{9}{10}\right)$.

— 51, § 4, 3e alinéa, 1re ligne — *lire* : empreinte *au lieu de* : fenêtre.

— 55, 1er tableau, 2e ligne — *lire* : $\left(\frac{2}{3}\right)$ *au lieu de* : $\left(\frac{3}{2}\right)$.

— 65, 1re ligne, après la figure (**71**) — *lire* : $O\,C$ *au lieu de* : $O\,B$.

— 109, dernière lettre de la page — *lire* : S^1 *au lieu de* : S.

— 115, § 1, 3e ligne — *lire* : puissances *au lieu de* : multiples.

— 124, au-dessous de formations secondaires, dernière ligne à droite — *lire* : partielle *au lieu de* : élidée.

— 131, 3e ligne après la figure (**128**) — *lire* : fondamentale *au lieu de* : fondamental.

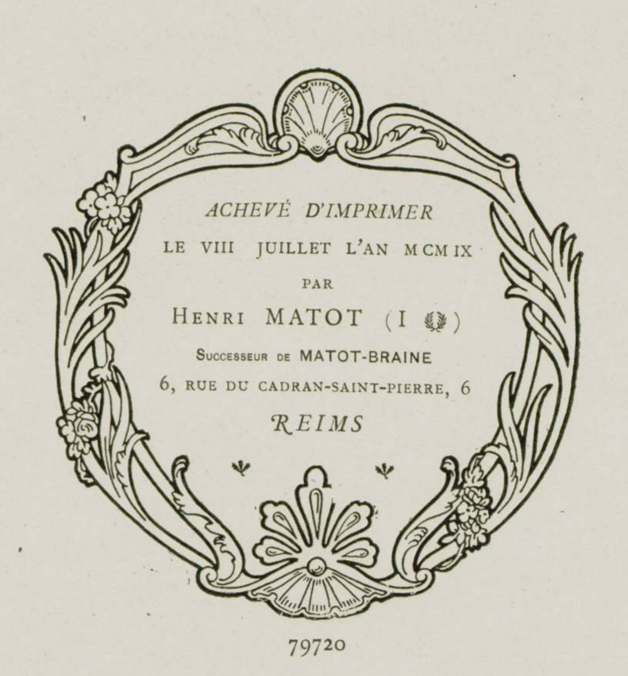
— 193, formule (**179**) — *lire* : $q = \frac{5\,\omega}{12} + \frac{3\,i - K}{12}$ *au lieu de* : $q = \frac{5\,\omega}{12}\ \frac{3\,i - K}{12}$

— 195, 2e alinéa, 4e ligne — *lire* : forts *au lieu de* : fort.

— 195, 7e ligne après la figure (**185**) — *lire* : les accompagnent *au lieu de* : l'accompagnent.

— 201, figure (**187**), 1re ligne : *lire* : $r\ s\ t$ *au lieu de* : $r\ s\ l$.




ACHEVÉ D'IMPRIMER
LE VIII JUILLET L'AN MCMIX
PAR
HENRI MATOT (I ✿)
SUCCESSEUR DE MATOT-BRAINE
6, RUE DU CADRAN-SAINT-PIERRE, 6
REIMS

79720



